

UNIVERSIDAD LABORAL DE ALCALÁ DE HENARES

ESCUELA UNIVERSITARIA DE

INGENIERÍA TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN

Especialidad: EQUIPOS ELECTRÓNICOS

1972-1975

SISTEMAS REALIMENTADOS DE CONTROL

SISTEMAS LINEALES

PROBLEMAS RESUELTOS

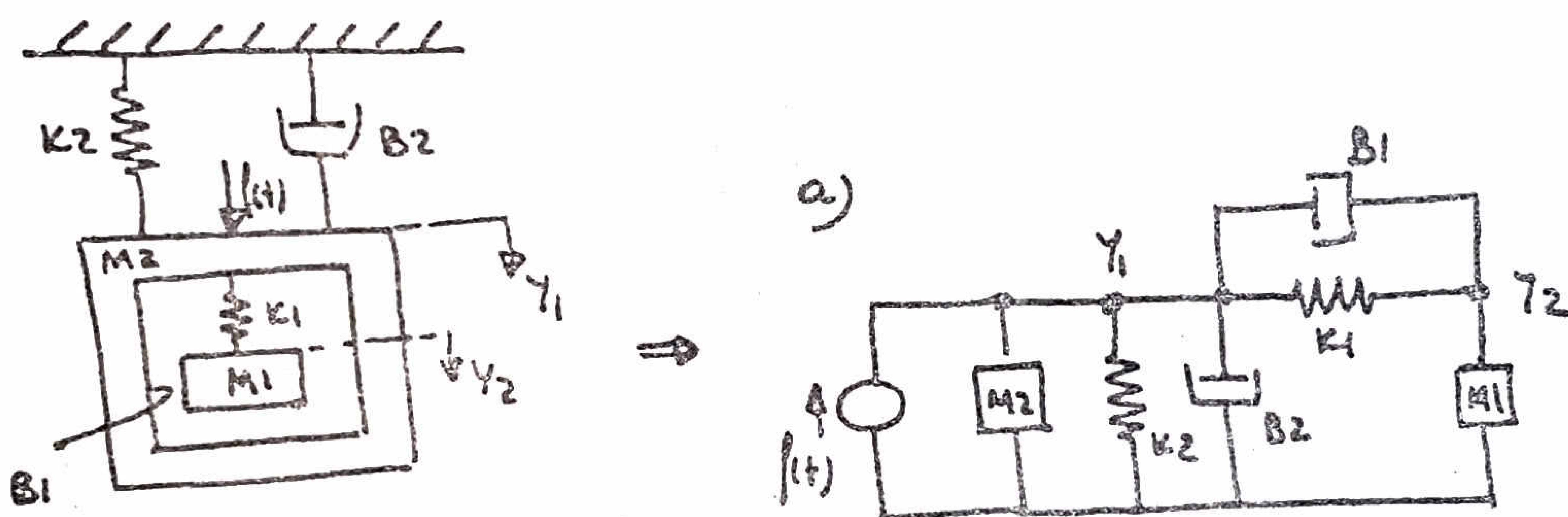
Capítulo 1.

(1)

a) Dibujar el circuito mecánico de la figura.

b) Partiendo del circuito mecánico escribir las ecuaciones diferenciales de su comportamiento.

c) Dibujar el circuito eléctrico análogo donde las tensiones son análogas a las velocidades y las corrientes a las fuerzas.

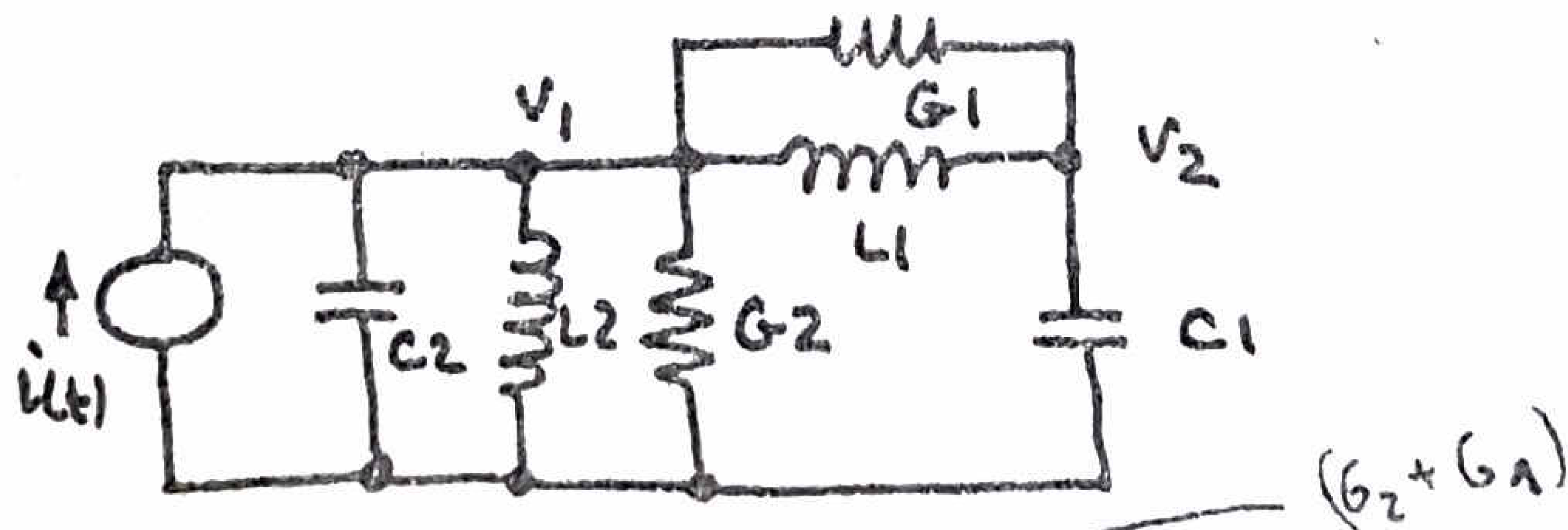


b)
$$\begin{cases} f(t) = \left[M_2D^2 + (B_2+B_1)D + K_1 + K_2\right]y_1 - (B_1D+K_1)y_2 \\ 0 = -(B_1D+K_1)y_1 + (M_1D^2 + B_1D + K_1)y_2 \end{cases}$$

También se pueden escribir, en función de las velocidades en los nudos $v_1 = Dy_1$ y $v_2 = Dy_2$

$$\begin{cases} f(t) = \left[M_2D + (B_2+B_1) + \frac{K_1+K_2}{D}\right]Dy_1 - \left(B_1 + \frac{K_1}{D}\right)Dy_2 \\ 0 = -\left(B_1 + \frac{K_1}{D}\right)Dy_1 + \left(M_1D + B_1 + \frac{K_1}{D}\right)Dy_2 \end{cases} \quad (A)$$

c)



$(G_2 + G_1)$

$$\begin{cases} i(t) = \left[C_2D + \left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1}\right)\frac{1}{D} + G_2\right]V_1 - \left[G_1 + \frac{1}{L_1D}\right]V_2 \\ 0 = -\left[G_1 + \frac{1}{L_1D}\right]V_1 + \left[C_1D + G_1 + \frac{1}{L_1D}\right]V_2 \end{cases} \quad (B)$$

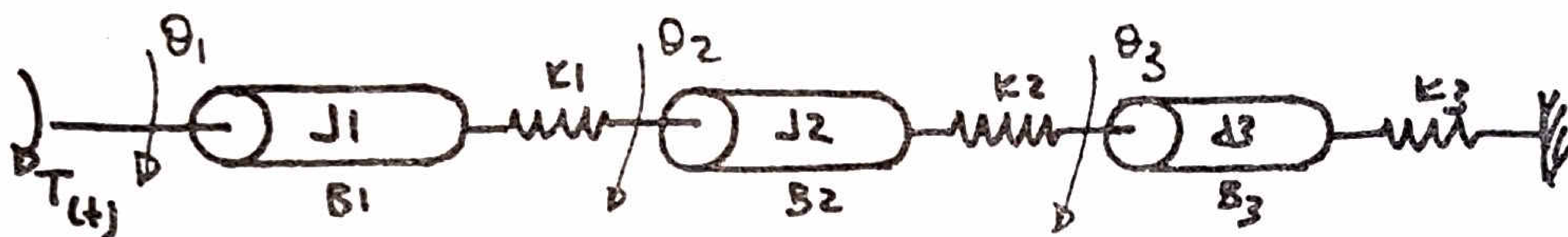
Las ecuaciones A y B son análogas haciendo

$C_2 = M_2$ $\quad G_2 = B$ $\quad C_1 = M_1$ $\quad G_1 = B_1$ $\quad L_1 = \frac{1}{K_1}$ $\quad L_2 = \frac{1}{K_2}$

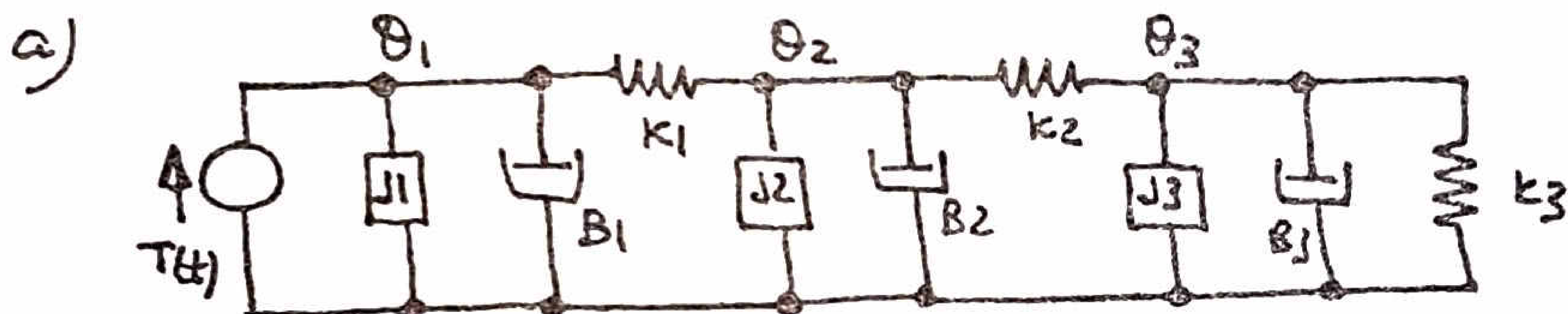
② a) Dibujar el circuito mecánico de la figura.

b) Plantear las ecuaciones diferenciales del comportamiento.

c) Dibujar el circuito eléctrico equivalente.



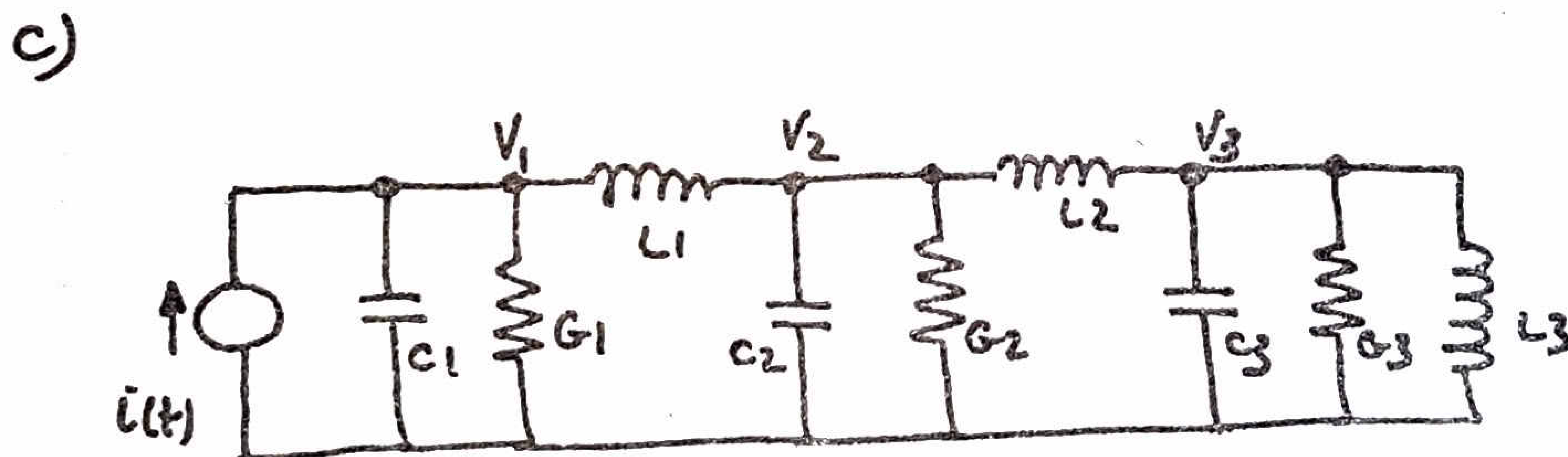
a)



b)

$$\begin{cases} T(t) = (J_1 D^2 + B_1 D + K_1)\theta_1 - K_1\theta_2 = \left(J_1 D + B_1 + \frac{K_1}{D}\right) D\theta_1 - \frac{K_1}{D} D\theta_2 \\ 0 = -K_1\theta_1 + (J_2 D^2 + B_2 D + K_1 + K_2)\theta_2 - K_2\theta_3 = -\frac{K_1}{D}\theta_1 + \left(J_2 D + B_2 + \frac{K_1+K_2}{D}\right) D\theta_2 - \frac{K_2}{D} D\theta_3 \\ 0 = -K_2\theta_2 + (J_3 D^2 + B_3 D + K_2 + K_3)\theta_3 = -\frac{K_2}{D} D\theta_2 + \left(J_3 D + B_3 + \frac{K_2+K_3}{D}\right) D\theta_3 \end{cases}$$

c)



Donde.

$C_1 = J_1$ $\quad C_2 = J_2$ $\quad C_3 = J_3$

$L_1 = \frac{1}{K_1}$ $\quad L_2 = \frac{1}{K_2}$ $\quad L_3 = \frac{1}{K_3}$

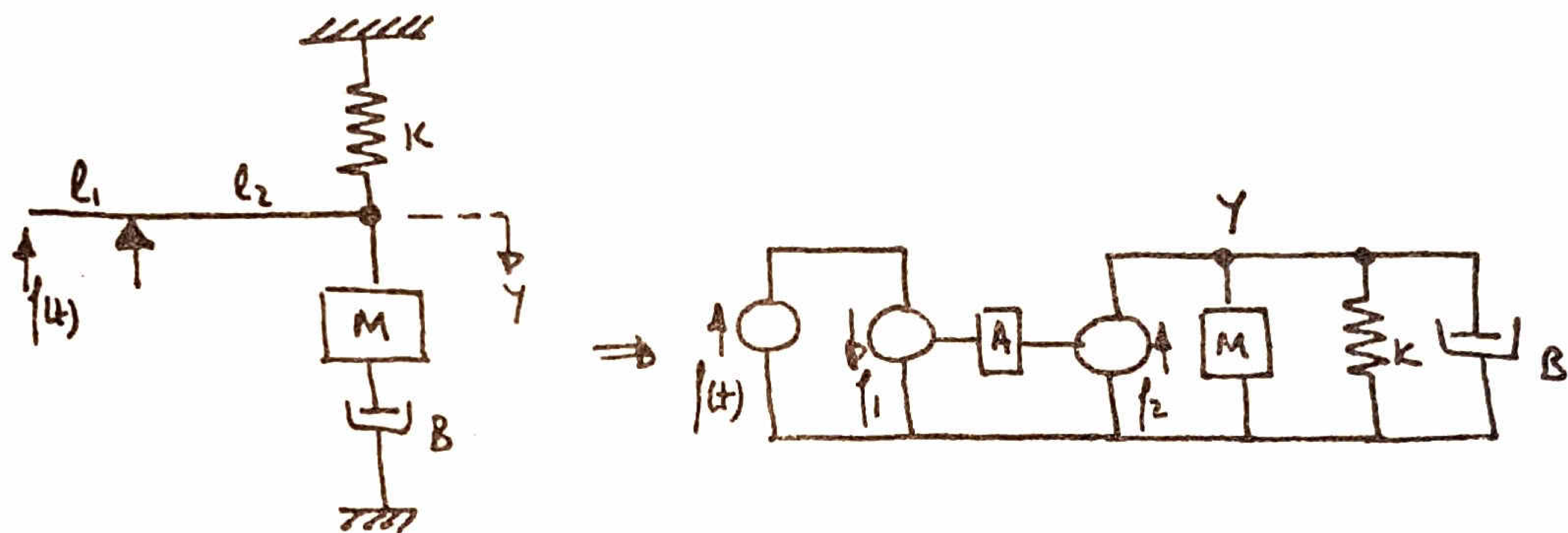
$G_1 = B_1$ $\quad G_2 = B_2$ $\quad G_3 = B_3$

$i(t) = T(t)$

$v_1 = D\theta_1$ $\quad v_2 = D\theta_2$ $\quad v_3 = D\theta_3$

③ a) Obtener la ecuación diferencial que relaciona la posición $y(t)$ y la fuerza $f(t)$.

b) Dibujar el circuito eléctrico equivalente.



a)

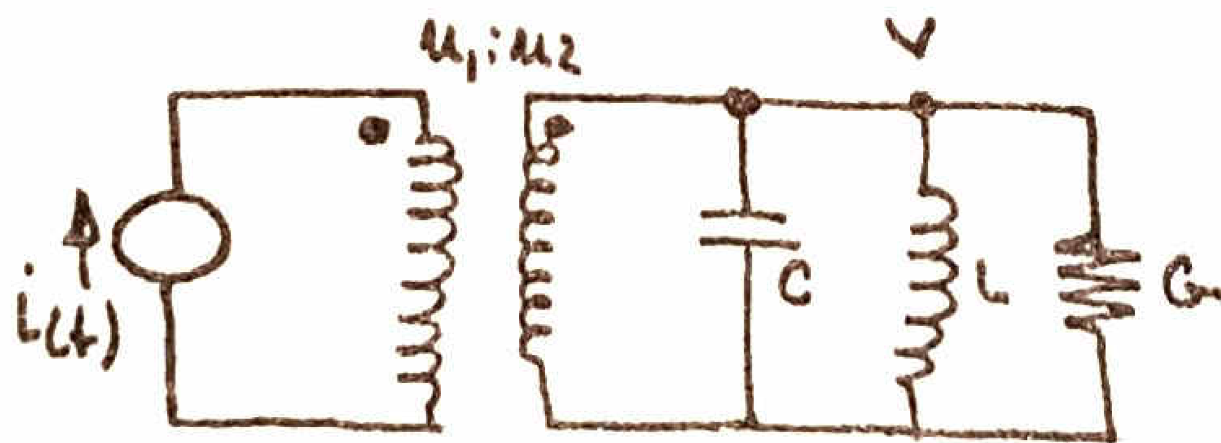
$$f = f_1$$
$$f_2 = (MD^2 + BD + K)\,y$$
$$f_2 = A f_1 = \frac{l_1}{l_2} f_1 = \frac{l_1}{l_2} f.$$

Por tanto

$$f = f_1$$

$$\boxed{f = \frac{l_2}{l_1}(MD^2 + BD + K)\,y.}$$, ecuación pedida.

b) Circuito eléctrico equivalente.



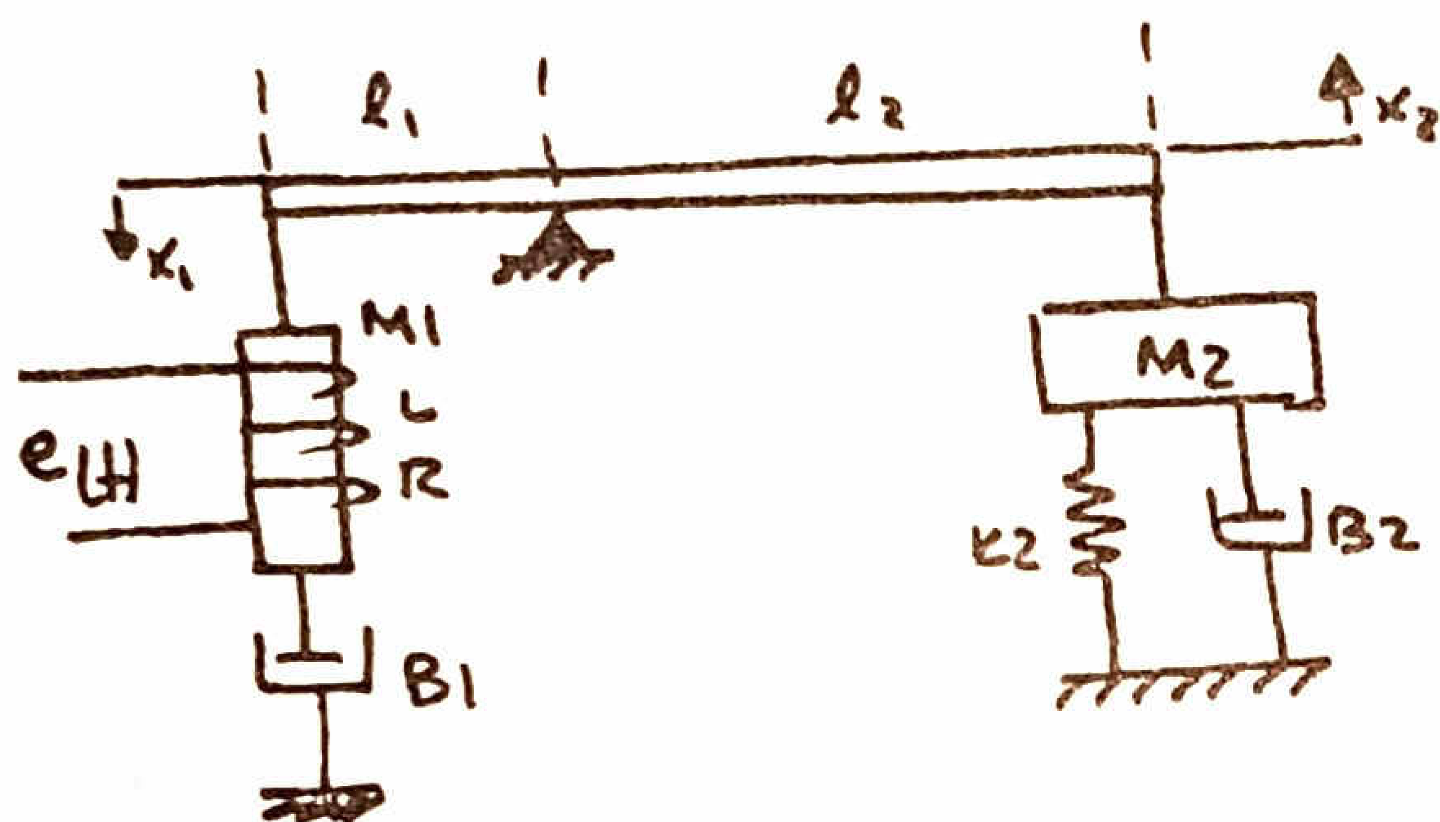
Donde :

$$i(t) = f(t)$$
$$C = M$$
$$L = \frac{1}{K}$$
$$G = B$$

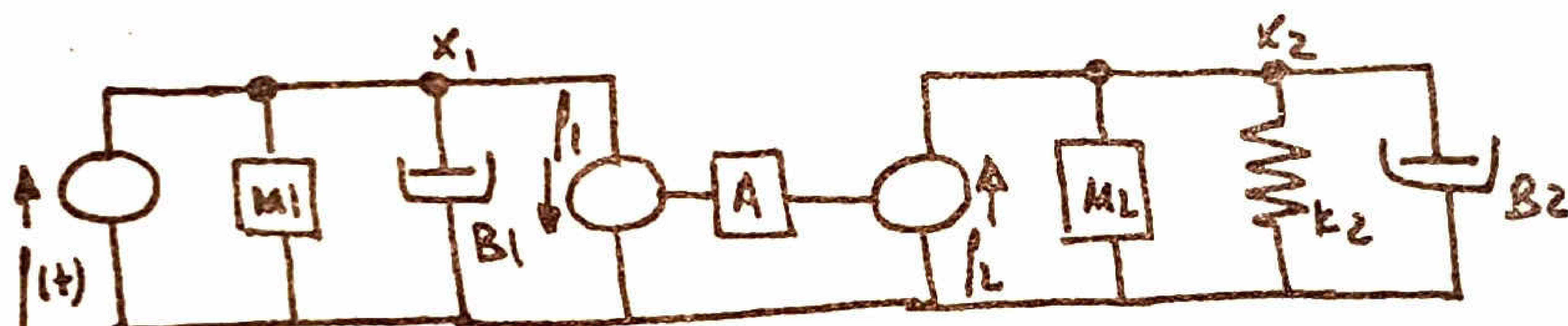
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$v = Dy.$$

④ El solenoide polarizado de la figura produce una fuerza magnética proporcional a la corriente de su bobina $f = K_d\, i$. La bobina tiene resistencia e inductancia. Plantear las ecuaciones diferenciales del comportamiento.



Circuito mecanico equivalente.



$$f(t) = (M_1 D^2 + B_1 D)\, x_1 + f_1$$

$$f_2 = (M_2 D^2 + B_2 D + K_2)\, x_2$$

Se cumple que

$$f_2 = A f_1 = \frac{l_1}{l_2} f_1 \text{ , por lo que}$$

$$f = (M_1 D^2 + B_1 D)\, x_1 + \frac{l_2}{l_1}(M_2 D^2 + B_2 D + K_2)\, x_2 \quad \rightarrow \quad \frac{x_2}{l_2} = \frac{x_1}{l_1}$$

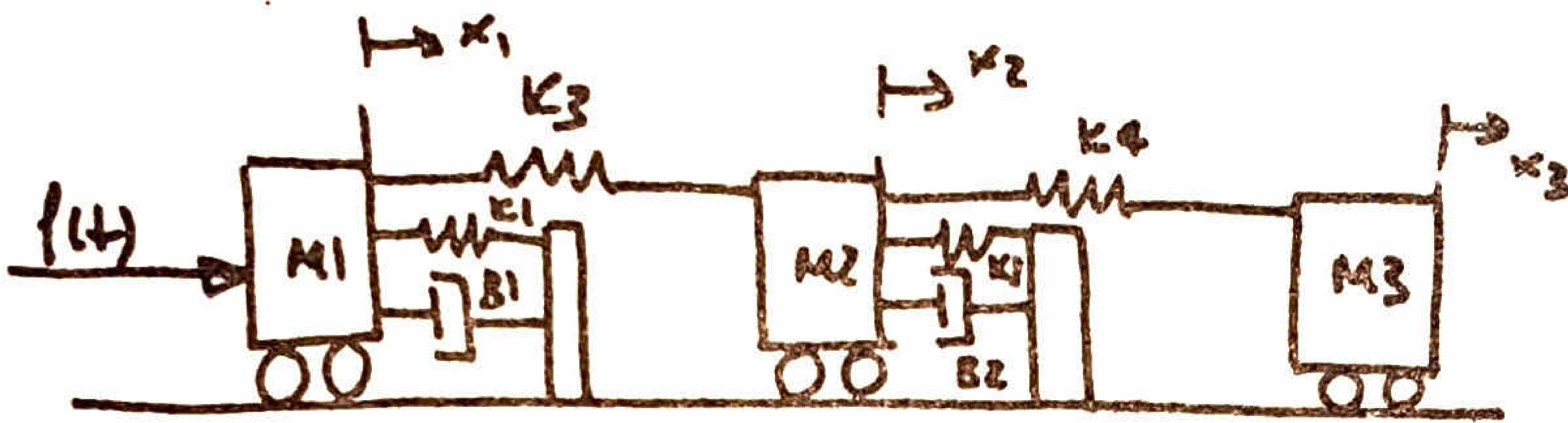
$$\begin{cases} f = (M_1 D^2 + B_1 D)\dfrac{l_1}{l_2}\, x_2 + \dfrac{l_2}{l_1}(M_2 D^2 + B_2 D + K_2)\, x_2 \quad \text{ó} \\ f = (M_1 D^2 + B_1 D)\, x_1 + \dfrac{l_2^2}{l_1^2}(M_2 D^2 + B_2 D + K_2)\, x_1 \end{cases}$$

$$f = K_d\, i = K_d \frac{e}{R + LD} \text{ , por tanto.}$$

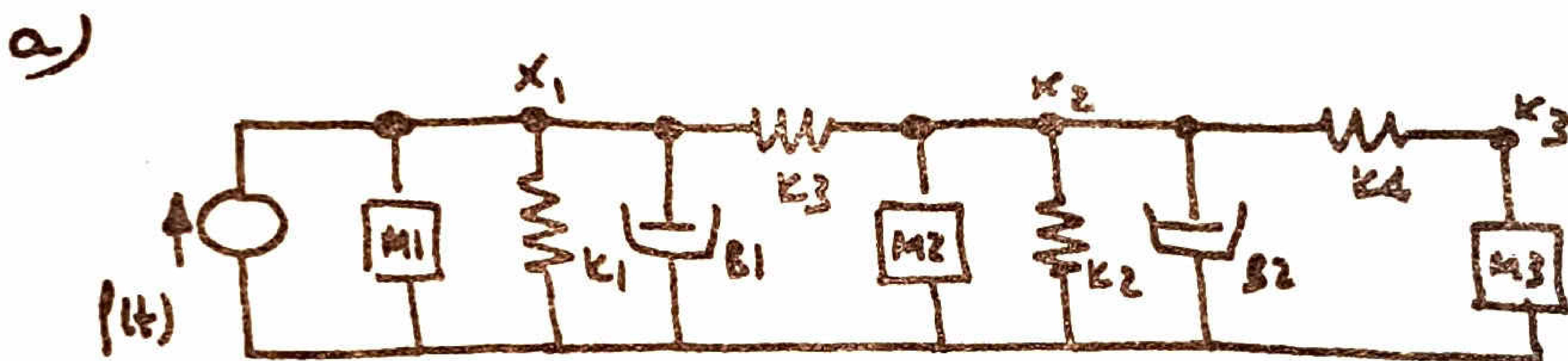
$$\begin{cases} e = \dfrac{R+LD}{K}\left[\left(M_1\dfrac{l_1}{l_2} + \dfrac{l_2}{l_1}M_2\right)D^2 + \left(B_1\dfrac{l_1}{l_2} + \dfrac{l_2}{l_1}B_2\right)D + \dfrac{l_2}{l_1}K_2\right] x_2 \quad \text{ó} \\ e = \dfrac{R+LD}{K}\left[\left(M_1 + \dfrac{l_2^2}{l_1^2}M\right)D^2 + \left(B_1 + \dfrac{l_2^2}{l_1^2}B_2\right)D + \dfrac{l_2^2}{l_1^2}K_2\right] x_1 \end{cases}$$

⑤ a) Dibújese el circuito mecánico del sistema de la figura.

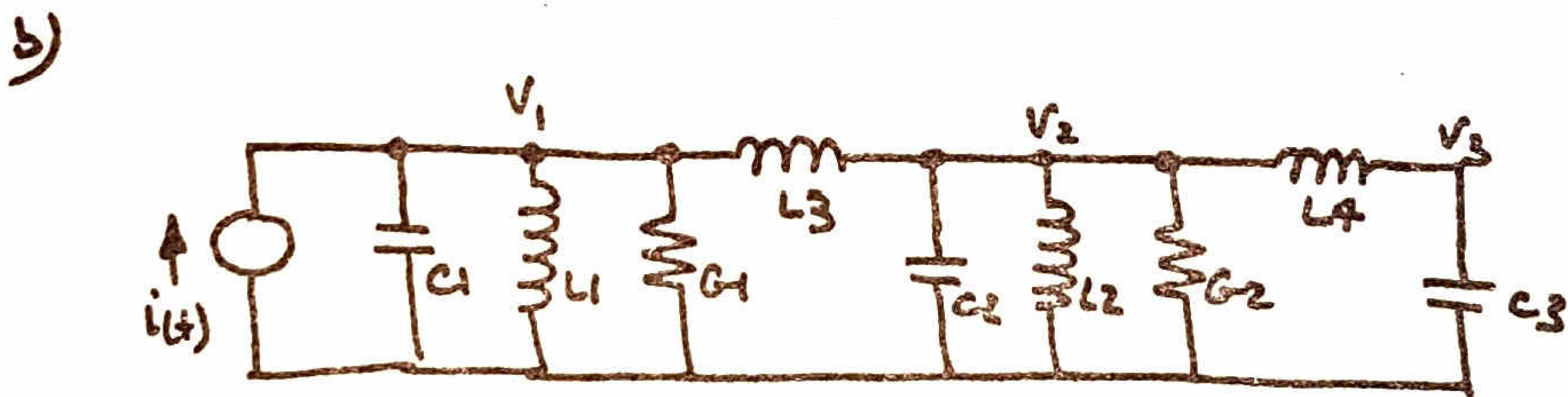
b) Dibújese el circuito eléctrico equivalente en el que la fuerza sea equivalente a la corriente.



a)



b)



$i(t) = f(t)$

$C_1 = M_1$ $\quad C_2 = M_2$ $\quad C_3 = M_3$

$L_1 = \frac{1}{K_1}$ $\quad L_2 = \frac{1}{K_2}$ $\quad L_3 = \frac{1}{K_3}$ $\quad L_4 = \frac{1}{K_4}$

$G_1 = B_1$ $\quad G_2 = B_2$ $\quad$ ~~B_3~~

⑥ En el sistema de la figura r_2 es el radio del tambor. a) Plantearse las ecuaciones diferenciales del sistema b) Obténgase la ecuación diferencial que relaciona la salida x_3 en función de la entrada θ_1

Circuito mecánico.

a)
$$\begin{cases} T(t) = K_1\theta_1 - K_1\theta_2 \\ 0 = -K_1\theta_1 + (J_2D^2 + B_2D + K_1)\theta_2 + T_1 \\ f_1 = (M_3D^2 + B_3D + K_3)\,x_3 \end{cases}$$

Se verifica que:

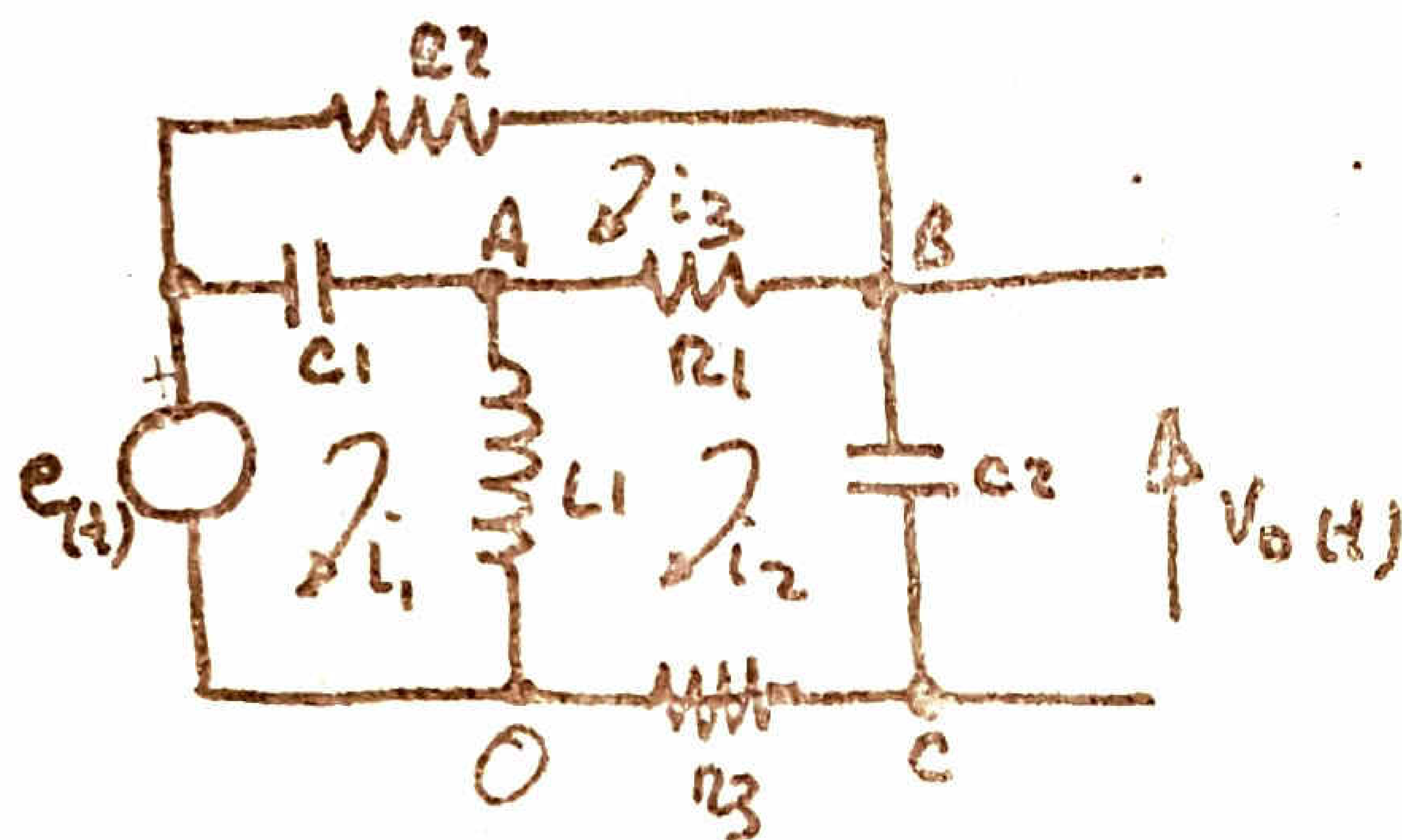
$T_1 = f_1 r_2 \qquad x_3 = \theta_2 r_2$ por lo que

$$\begin{cases} T = K_1(\theta_1 - \theta_2) \\ 0 = -K_1\theta_1 + (J_2D^2 + B_2D + K_1)\theta_2 + r_2(M_3D^2 + B_3D + K_3)\theta_2 r_2 = \\ = -K_1\theta_1 + \left[(J_2 + M_3r^2)D^2 + (B_2 + B_3r^2)D + (K_1 + K_3r^2)\right]\theta_2 \end{cases}$$

(7) Plantear las ecuaciones para determinar v_o.

a) Emplear ecuaciones nodales

b) Id. de bucles.



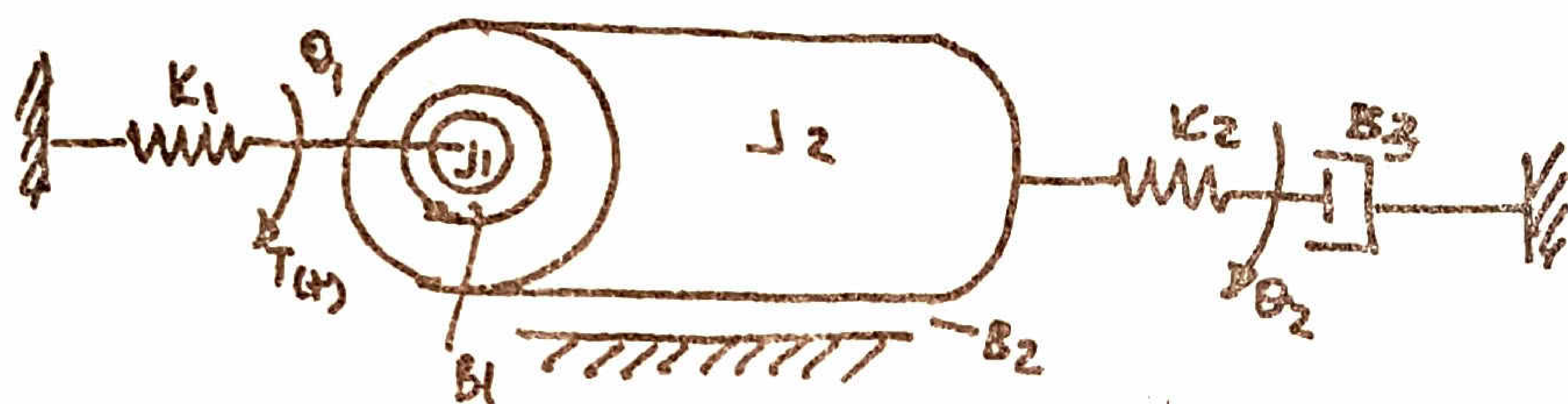
a)

$$\begin{cases} 0 = -C_1 D e + \left(C_1 D + \frac{1}{L_1 D} + \frac{1}{R_1}\right) V_A - \frac{1}{R_1} V_B \\ 0 = -\frac{1}{R_2} e - \frac{1}{R_1} V_A + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_2 D\right) V_B - C_2 D V_C \\ 0 = -C_2 D V_B + \left(C_2 D + \frac{1}{R_3}\right) V_C \\ 0 = v_B - v_C - v_o \end{cases}$$

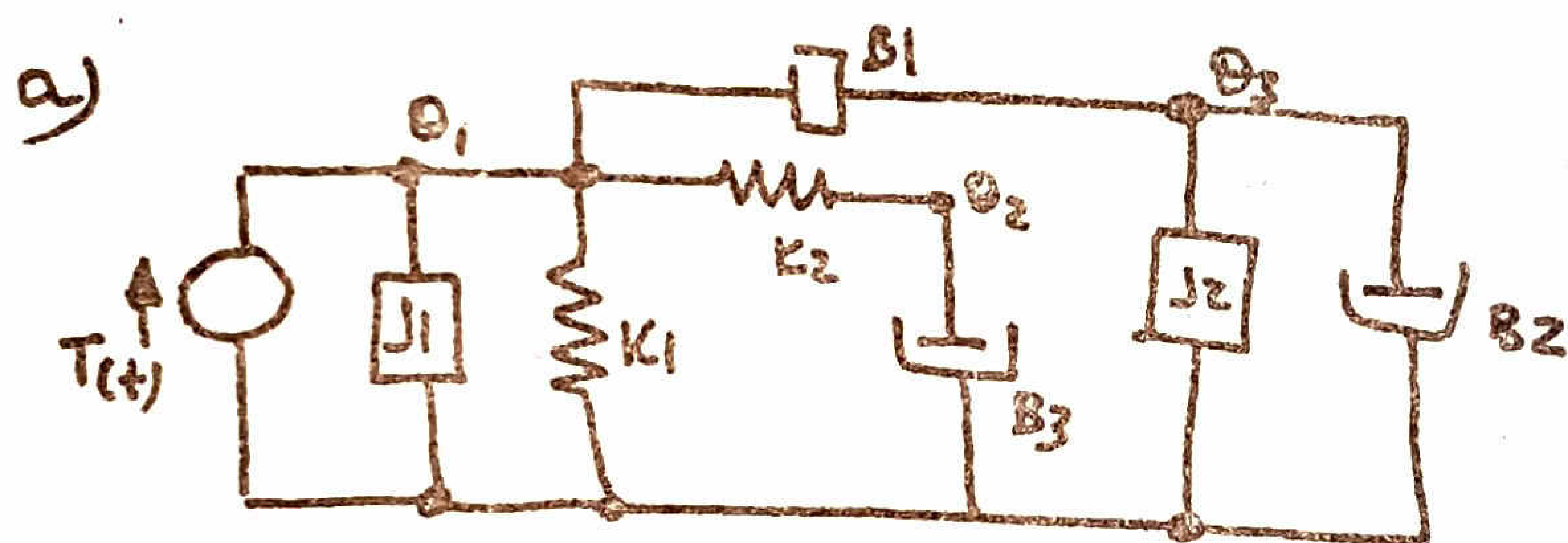
b)

$$\begin{cases} 0 = -e + \left(\frac{1}{C_1 D} + L_1 D\right) i_1 - L_1 D i_2 - \frac{1}{C_1 D} i_3 \\ 0 = -L_1 D i_1 + \left(L_1 D + \frac{1}{C_2 D} + R_1 + R_3\right) i_2 - R_1 i_3 \\ 0 = -\frac{1}{C_1 D} i_1 - R_1 i_2 + \left(\frac{1}{C_1 D} + R_1 + R_2\right) i_3 \\ 0 = \frac{1}{C_2 D} i_2 - v_o \end{cases}$$

(8) La figura representa un cilindro de inercia J_1 dentro de un manguito de inercia J_2. Hay una fricción viscosa B_1 entre el cilindro y el manguito. a) Dibújese el circuito mecánico. b) Planteense las ecuaciones del sistema. c) Dibújese el circuito eléctrico equivalente.



a)



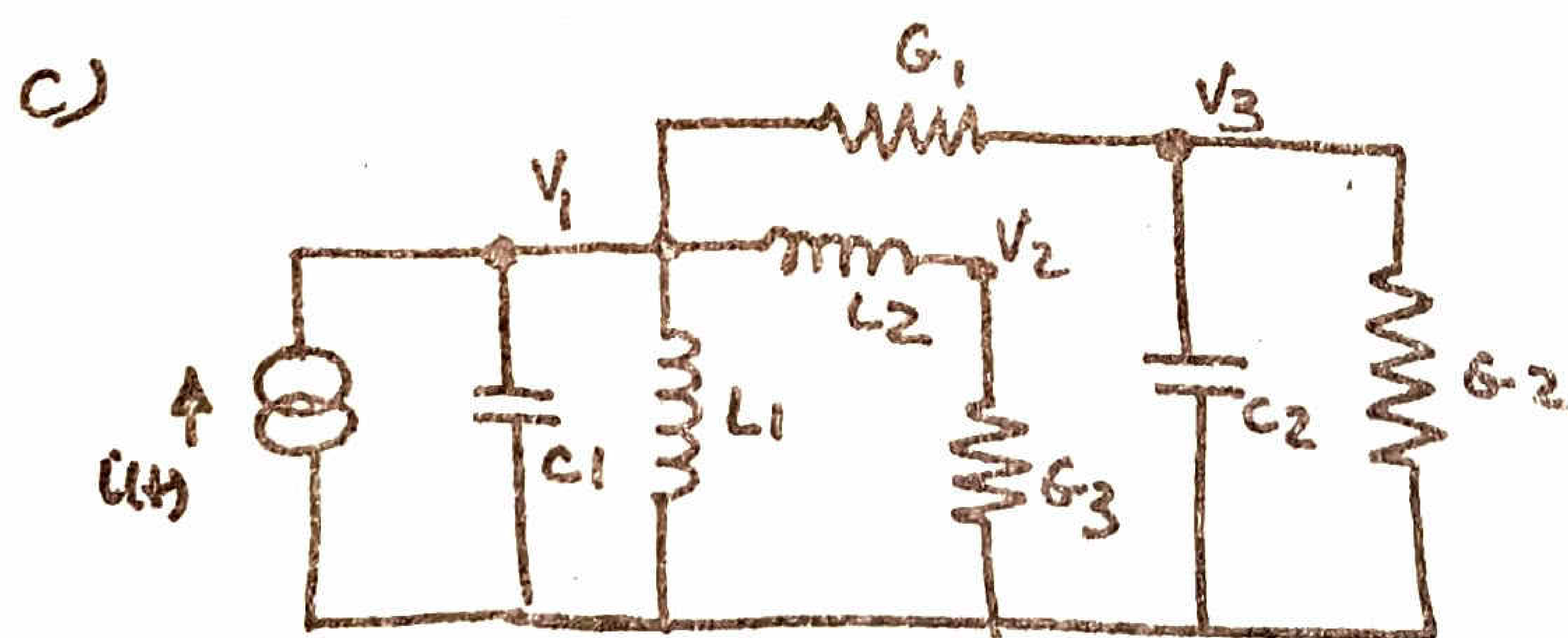
b)

$$T(t) = (J_1 D^2 + K_1 + K_2 + B_1 D)\theta_1 - K_2\theta_2 - B_1 D\theta_3$$

$$0 = -K_2\theta_1 + (B_3 D + K_2)\theta_2$$

$$0 = -B_1 D\theta_1 + (J_2 D^2 + B_1 D + B_2 D)\theta_3$$

c)



$i(t) = T(t)$

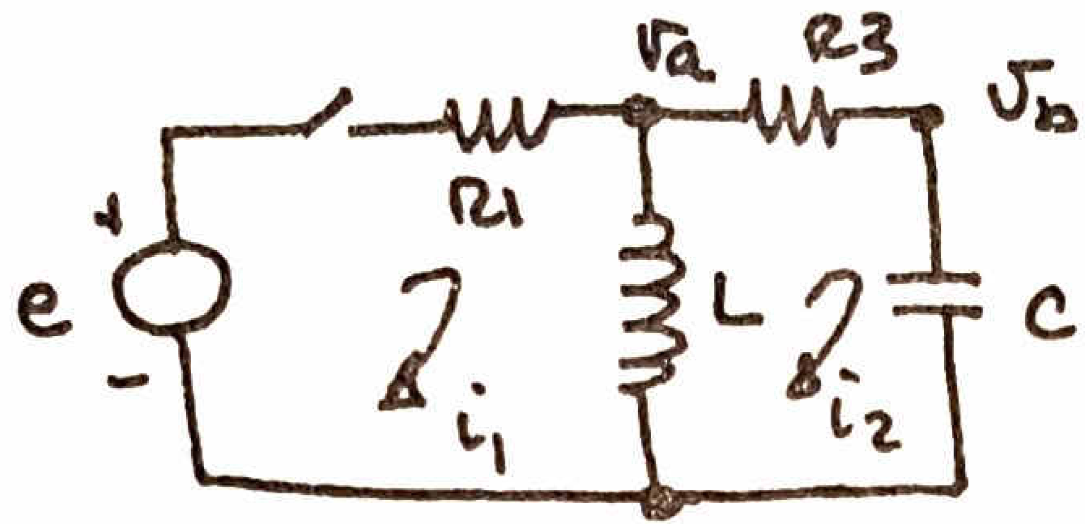
$C_1 = J_1 \qquad C_2 = J_2$

$L_1 = \frac{1}{K_1} \qquad L_2 = \frac{1}{K_2}$

$G_1 = B_1 \qquad G_2 = B_2 \qquad G_3 = B_3$

$V_1 = D\theta_1 \qquad V_2 = D\theta_2 \qquad V_3 = D\theta_3$

(9) Plantear las ecuaciones de nudos y de mallas cuando se cierra el interruptor.



Ecuaciones de nudos.

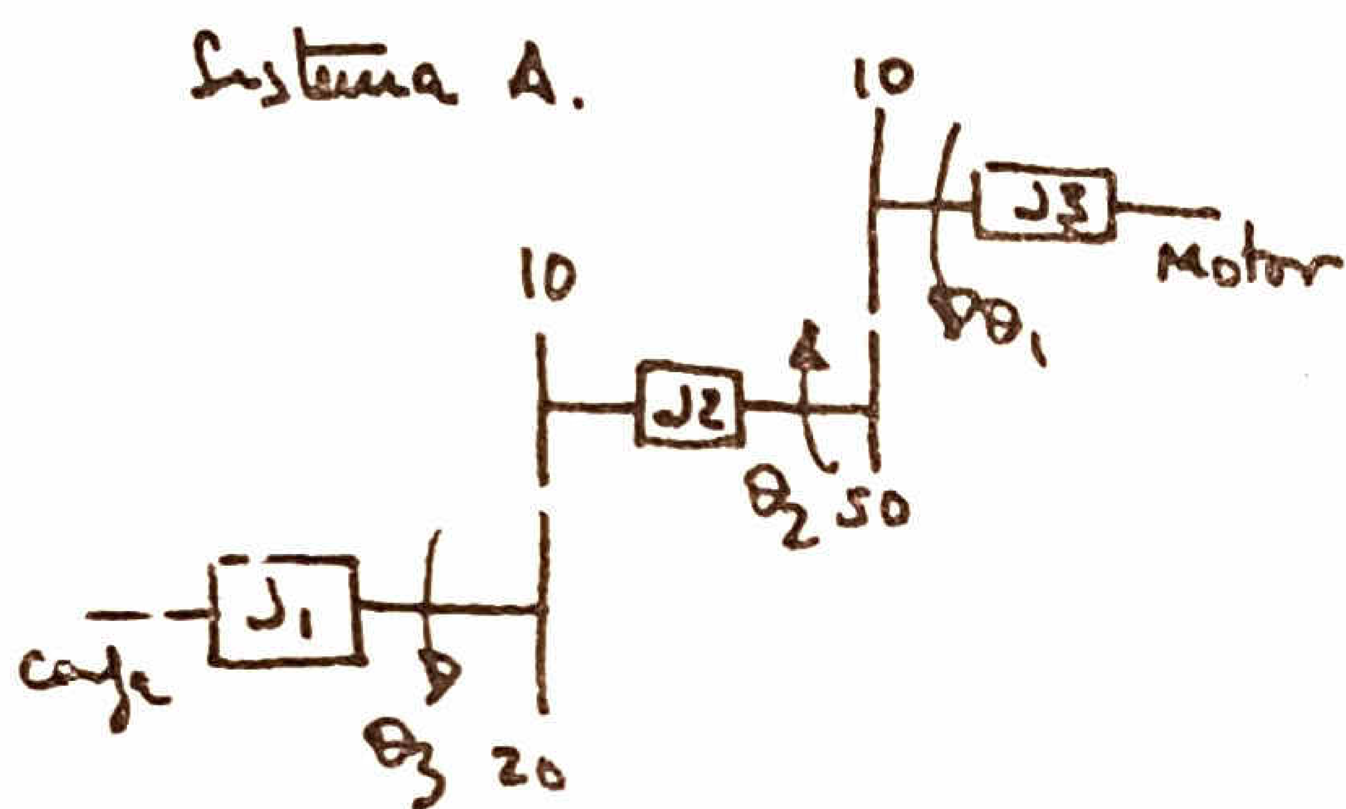
$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{R_1} e + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{LD}\right) V_a - \frac{1}{R_3} V_b \\ 0 = -\frac{1}{R_3} V_a + \left(\frac{1}{R_3} + CD\right) V_b \end{cases}$$

Ecuaciones de mallas.

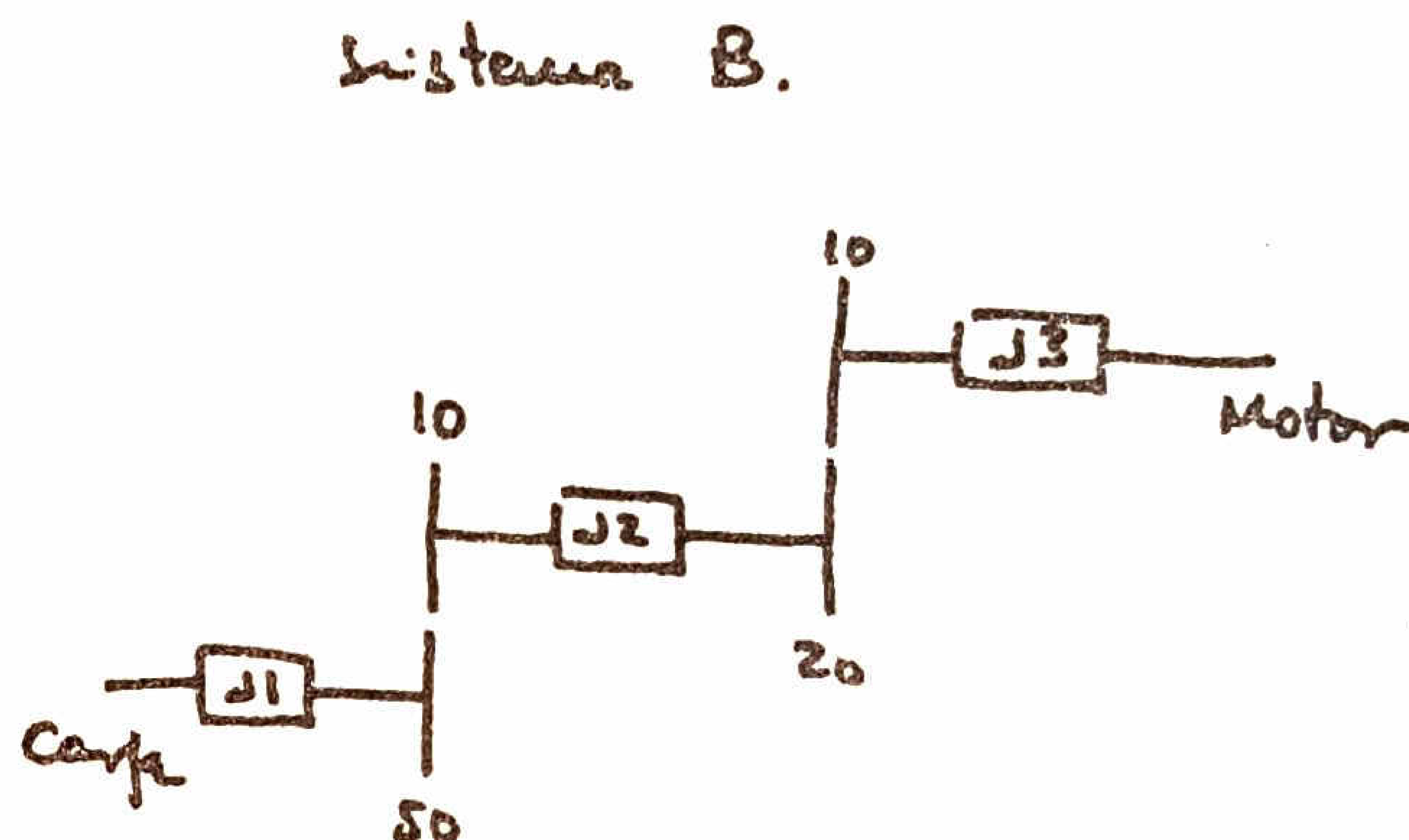
$$\begin{cases} e = (R_1 + LD)\, i_1 - LD\, i_2 \\ 0 = -LD\, i_1 + \left(LD + \frac{1}{CD} + R_3\right) i_2 \end{cases}$$

(10) Los dos trenes de engranajes tienen idénticas reducción de velocidad, inercias de cada paso y son actuados por el mismo motor. El número de dientes de cada engranaje se indica en las figuras. En el arranque, el motor aplica un par T. ¿Cuál de los dos sistemas tiene una aceleración inicial mayor?

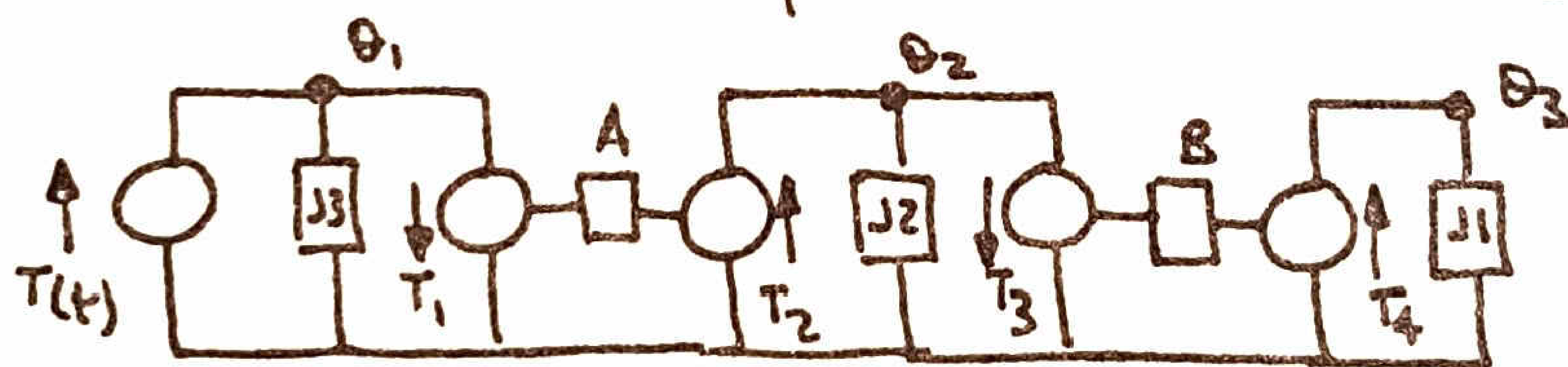
Sistema A.



Sistema B.



Sistema mecanico para ambos sistemas.



$$\begin{cases} T = J_3 D^2\theta_1 + T_1 \\ T_2 = J_2 D^2 \theta_2 + T_3 \\ T_4 = J_1 D^2 \theta_3 \end{cases}$$

Se cumple que:

$$T_2 = A\,T_1 \qquad \theta_2 = \frac{1}{A}\theta_1$$

$$T_4 = B\,T_3 \qquad \theta_3 = \frac{1}{A}\frac{1}{B}\theta_1$$

Por tanto

$$T = J_3 D^2\theta_1 + \frac{1}{A}\left[J_2 D^2\left(\frac{1}{A}\theta_1\right) + \frac{1}{B}J_1 D^2\left(\frac{1}{A}\frac{1}{B}\theta_1\right)\right] = \left(J_3 D^2 + \frac{1}{A^2}J_2 D^2 + \frac{1}{A^2B^2}J_1 D^2\right)\theta_1$$

también, en función de θ_3

$$T = \left(J_3 D^2 + \frac{B}{A}J_2 D^2 + \frac{1}{AB}J_1 D^2\right)\theta_3$$

Sistema A.

$A = 5 \qquad B = 2$

$$D^2\theta_{3A} = \frac{T}{J_3 + \frac{2}{5}J_2 + \frac{1}{10}J_1}$$

(10) Continuación

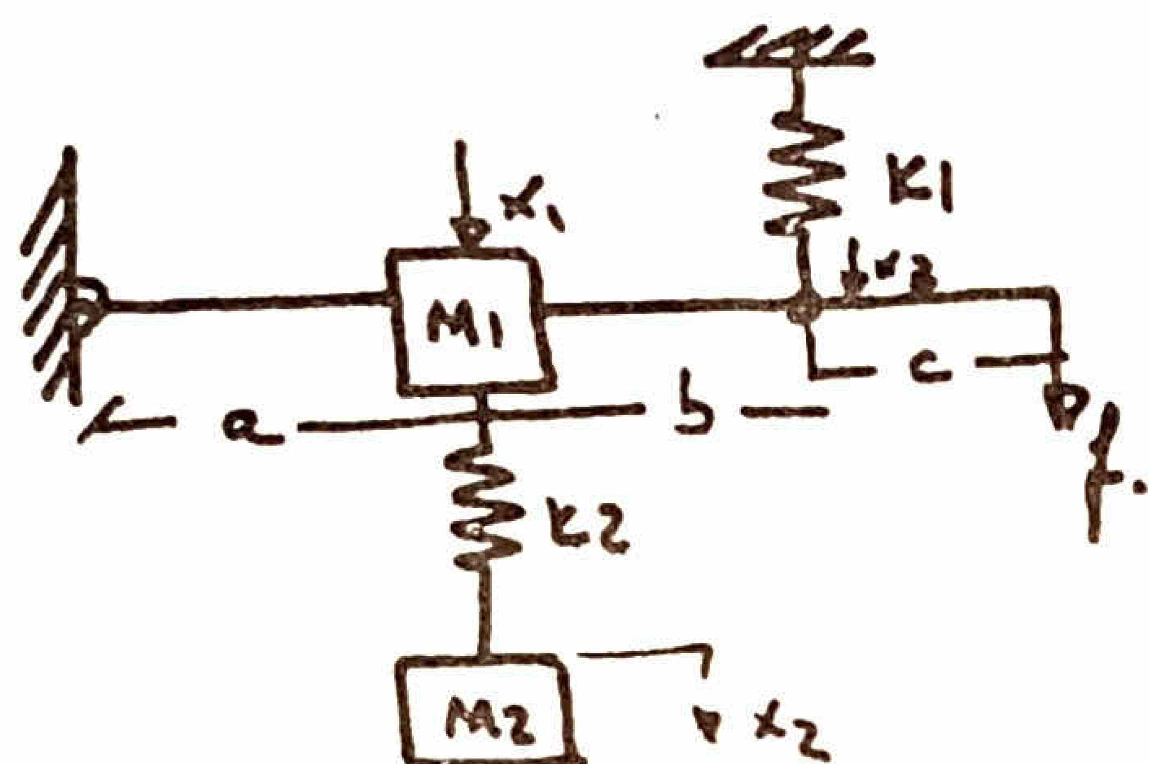
Sistema B

A = 2   B = 5

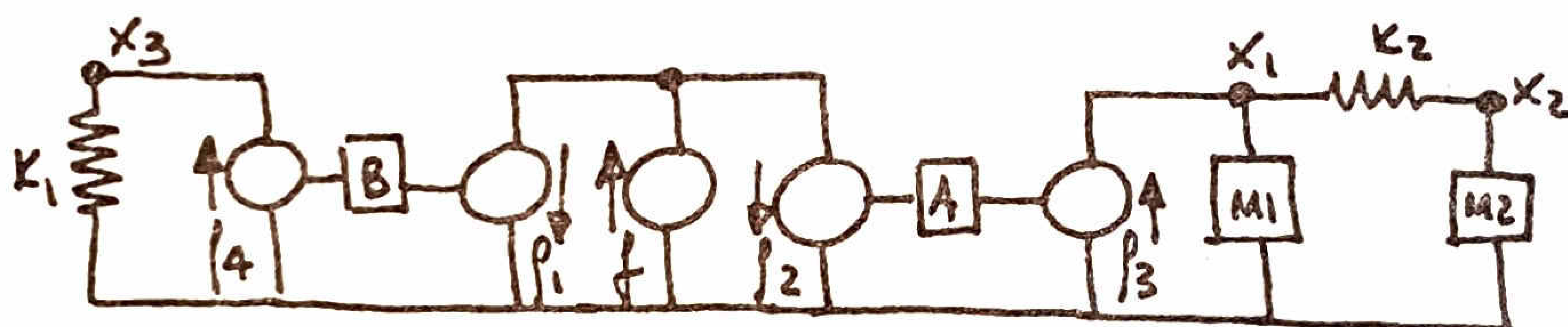
$$D^2\theta_{3_B} = \frac{T}{J_3 + \frac{5}{2}J_2 + \frac{1}{10}J_1}$$ por lo que

$$D^2\theta_{3_A} > D^2\theta_{3_B}$$

(11) Plantear las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del sistema de la figura con pequeños desplazamientos.



Sistema mecánico equivalente.



$f = f_1 + f_2$

$f_3 = (M_1 D^2 + K_2)x_1 - K_2 x_2$

$0 = -K_2 x_1 + (M_2 D^2 + K_2)x_2$

$f_4 = K_1 x_3$

Se cumple que:

$f_3 = A f_2 = \dfrac{a+b+c}{a} f_2$

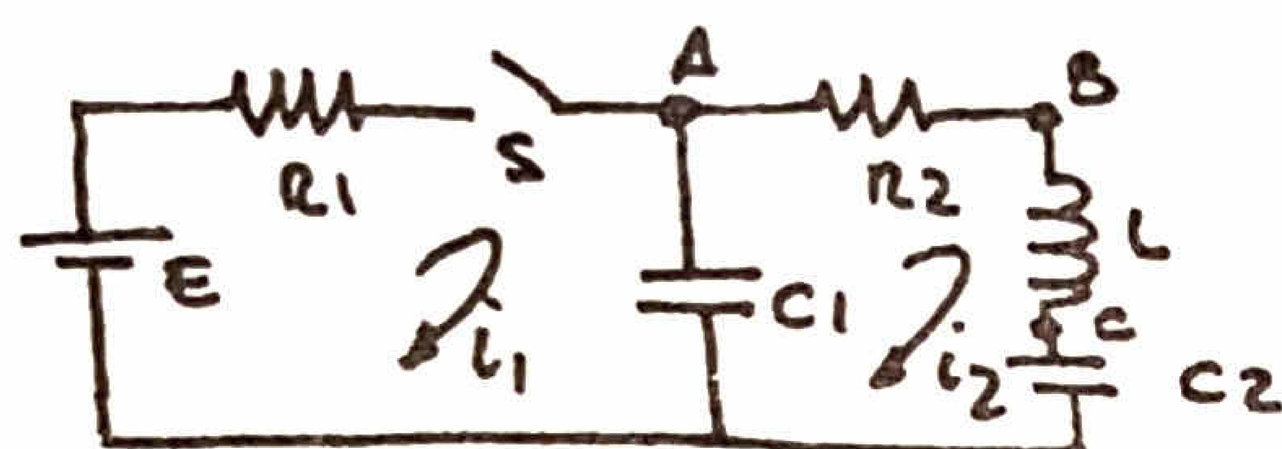
$f_4 = B f_1 = \dfrac{a+b+c}{a+b} f_1$

$x_3 = \dfrac{a+b}{a} x_1$

Por tanto, queda

$$\begin{cases} f = \dfrac{a+b}{a+b+c}\,\dfrac{a+b}{a} K_1 x_1 + \dfrac{a}{a+b+c}\left[(M_1 D^2 + K_2)x_1 - K_2 x_2\right] = \\ = \left[\dfrac{a+b}{a+b+c}\left(1+\dfrac{b}{a}\right)K_1 + \dfrac{a}{a+b+c}K_2 + \dfrac{a}{a+b+c}M_1 D^2\right]x_1 - \dfrac{a}{a+b+c}K_2 x_2 \\ 0 = -K_2 x_1 + (M_2 D^2 + K_2)x_2 \end{cases}$$

(12) Plantear las ecuaciones nodales y de mallas del circuito de la figura una vez se cierra el interruptor S.



Ecuaciones de nudos.

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{R_1}E + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_1 D\right) V_A - \frac{1}{R_2} V_B \\ 0 = -\frac{1}{R_2} V_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{LD}\right) V_B - \frac{1}{LD} V_C \\ 0 = -\frac{1}{LD} V_B + \left(\frac{1}{LD} + CD\right) V_C \end{cases}$$

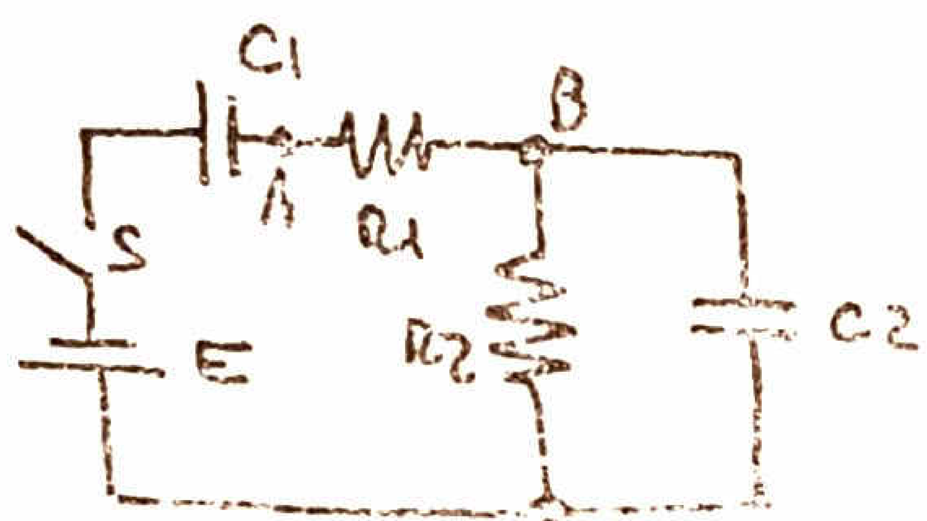
Ecuaciones de mallas.

$$\begin{cases} E = \left(R_1 + \frac{1}{C_1 D}\right) i_1 - \frac{1}{C_1 D} i_2 \\ 0 = -\frac{1}{C_1 D} i_1 + \left(R_2 + LD + \frac{1}{C_1 D} + \frac{1}{C_2 D}\right) i_2 \end{cases}$$

Capítulo 2

(13) a) ¿Cuál es el valor inicial de la corriente en R_1 y R_2 cuando se cierra el interruptor?

b) Hallar el voltaje en bornas de C_2 en función del tiempo.



Si C_1 y C_2 están inicialmente descargados se cumple que:

$$I_{R1(0)} = \frac{E}{R1} \qquad I_{R2(0)} = 0$$

Ecua. de los nudos del circuito.

$$\begin{cases} 0 = -C_1DE + \left(\frac{1}{R_1} + C_1D\right)V_A - \frac{1}{R_1}V_B \\ 0 = -\frac{1}{R_1}V_A + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_2D\right)V_B \end{cases}$$

$$V_B = \frac{\begin{vmatrix} C_1D + \frac{1}{R_1} & C_1DE \\ -\frac{1}{R_1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1D + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_2D \end{vmatrix}} = \frac{\frac{C_1D}{R_1}E}{C_1C_2D^2 + \frac{C_1}{R_2}D + \frac{C_1}{R_1}D + \frac{C_2}{R_1}D + \frac{1}{R_1R_2}}$$

$$\left[R_1R_2C_1C_2D^2 + (C_1R_1 + C_1R_2 + C_2R_2)D + 1\right] V_B = R_2C_1DE = 0$$ ya que $DE = 0$

$$\left[D^2 + \left(\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_1C_1}\right)D + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}\right] V_b = 0 \Rightarrow \left[D^2 + 2\zeta\omega_n D + \omega_n^2\right] V_b = 0$$

$$D = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Por tanto:

$$V_b = Ae^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} + \theta\right) \quad \text{ó}$$

$$V_b = c_1e^{-at} + c_2e^{-bt}$$ si las raíces del polinomio característico son reales.

(14) En el problema 4 los parametros tienen los siguientes valores:

$M_1 = 2$ Kg $B_1 = 8$ Nw.sg/m $K_2 = 36$ Nw/m $l_2 = 1$ m

$M_2 = 4$ Kg $B_2 = 16$ Nw.sg/m $l_1 = 0{,}5$ m $f(t) = u(t)$

Calcular x_2.

La ecuación obtenida en aquel problema era.

$$f = \left[\left(M_1 \frac{l_1}{l_2} + M_2 \frac{l_2}{l_1}\right) D^2 + \left(B_1 \frac{l_1}{l_2} + B_2 \frac{l_2}{l_1}\right) D + K_2 \frac{l_2}{l_1}\right] x_2$$

Sustituyendo valores

$$f = \left[\left(\tfrac{1}{2} 2 + 2 \times 4\right) D^2 + \left(\tfrac{1}{2} 8 + 2 \times 16\right) D + 2 \times 36\right] x_2$$

$$f = \left[9D^2 + 36D + 72\right] x_2$$

La ecuación a resolver es:

$$\left(9D^2 + 36D + 72\right) x_2 = u(t).$$

a) Solución homogénea.

$$9D^2 + 36D + 72 = 0 \qquad D = -2 \pm 2j$$

b) Solución particular.

$$x_{2p} = \frac{1}{72}$$

c) Solución total.

$$x_2 = x_{2h} + x_{2p} = \frac{1}{72} + A e^{-2t} \operatorname{sen}(2t + \theta)$$

Calculo de A y θ.

$$\begin{cases} x_2(0) = A \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{72} = 0 \\ x_2'(0) = -2A \operatorname{sen}\theta + A\cos\theta = 0 \end{cases}$$

(Sistema inicialmente en reposo)

$$A = -\frac{1}{35} \qquad \theta = 27^\circ$$

$$x_2 = -\frac{1}{35} e^{-2t} \operatorname{sen}(7t + 27^\circ) + \frac{1}{72}$$

(15) Dados: a) $r(t) = [(D+1)(D^2+4D+5)]\, c(t)$; b) $r(t) = t\,u(t)$; c) todas las condiciones iniciales nulas determinar la solución completa con todas sus constantes.

$$(D+1)(D^2+4D+5)\,c = r$$

$$(D+1)(D^2+4D+5) = 0 \Rightarrow D = -1,\ -2\pm j$$

$$c_h = C_1 e^{-t} + A e^{-2t} \operatorname{sen}(t+\theta)$$

$$(D^3+5D^2+9D+5)\,c = t\,u(t)$$

$$c = \frac{1}{D^3+5D^2+9D+5}\, t\,u(t) = \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{25}D \cdots\right)(t\,u(t)) = \frac{1}{5}t - \frac{9}{25}$$

$$c_t = c_h + c_p = C_1 e^{-t} + A e^{-2t}\operatorname{sen}(t+\theta) + \frac{1}{5}t - \frac{9}{25}$$

$$c'_{(t)} = -C_1 e^{-t} - 2A e^{-2t}\operatorname{sen}(t+\theta) + A e^{-2t}\cos(t+\theta)$$

$$c''_{(t)} = +C_1 e^{-t} + 4A e^{-2t}\operatorname{sen}(t+\theta) - 2Ae^{-2t}\cos(t+\theta) - 2Ae^{-2t}\cos(t+\theta) - Ae^{-2t}\operatorname{sen}(t+\theta)$$

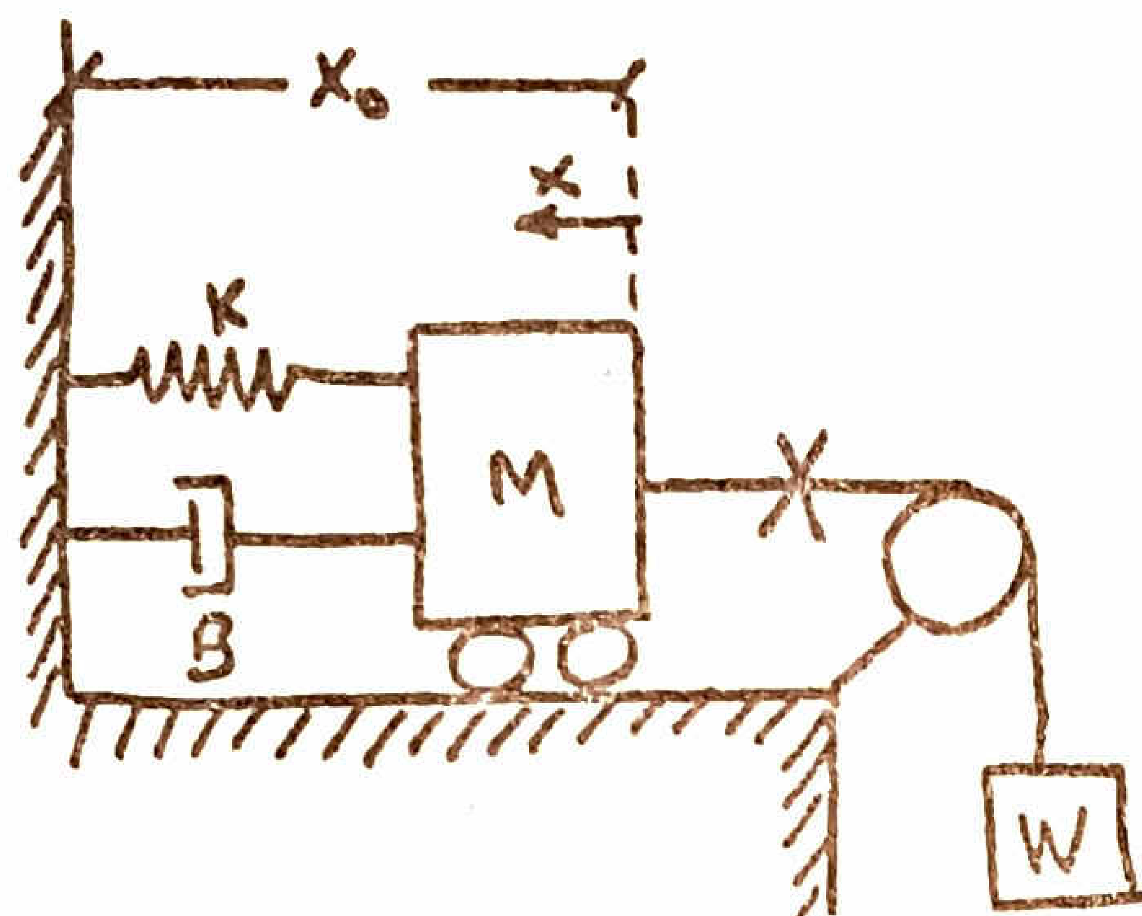
$$= C_1 e^{-t} + 3Ae^{-2t}\operatorname{sen}(t+\theta) - 4Ae^{-2t}\cos(t+\theta)$$

$$\begin{cases} c_{(t=0)} = 0 = C_1 + A\operatorname{sen}\theta - \frac{9}{25} \\ c'_{(t=0)} = 0 = -C_1 - 2A\operatorname{sen}\theta + A\cos\theta + \frac{1}{5} \\ c''_{(t=0)} = 0 = C_1 + 3A\operatorname{sen}\theta - 4A\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \theta = -83^\circ \\ A = 0{,}145 \\ C_1 = 0{,}504 \end{array}$$

Por tanto,

$$c(t) = 0{,}504\, e^{-t} + 0{,}145 \operatorname{sen}(t - 83^\circ) + \frac{1}{5}t - \frac{9}{25}$$

(16) El sistema de la figura está inicialmente en reposo. En el tiempo $t=0$, la cuerda que conecta W con M se rompe en x. Encontrar $x(t)$



$M = 2$ Kg
$K = 16$ New/m
$B = 8$ New×sg/m
$W = 32$ New

Inicialmente el resorte está estirado x_0 con el fin de verificarse que:

$$K x_0 = W.$$

La ecuación diferencial del circuito es la siguiente

$$(MD^2 + BD)x = K(x_0 - x)$$

$$(MD^2 + BD + K)x = Kx_0 = W$$

$$(2D^2 + 8D + 16)x = 32$$

a) solución homogenea

$$2D^2 + 8D + 16 = 0 \qquad D = -2 \pm 2i$$

b) solución particular

$$x_p = \frac{32}{16} = 2$$

c) solución total

$$x = x_p + x_h = 2 + Ae^{-2t} \operatorname{sen}(2t + \theta)$$

$$x' = -2Ae^{-2t} \operatorname{sen}(2t+\theta) + 2Ae^{-2t} \cos(2t+\theta)$$

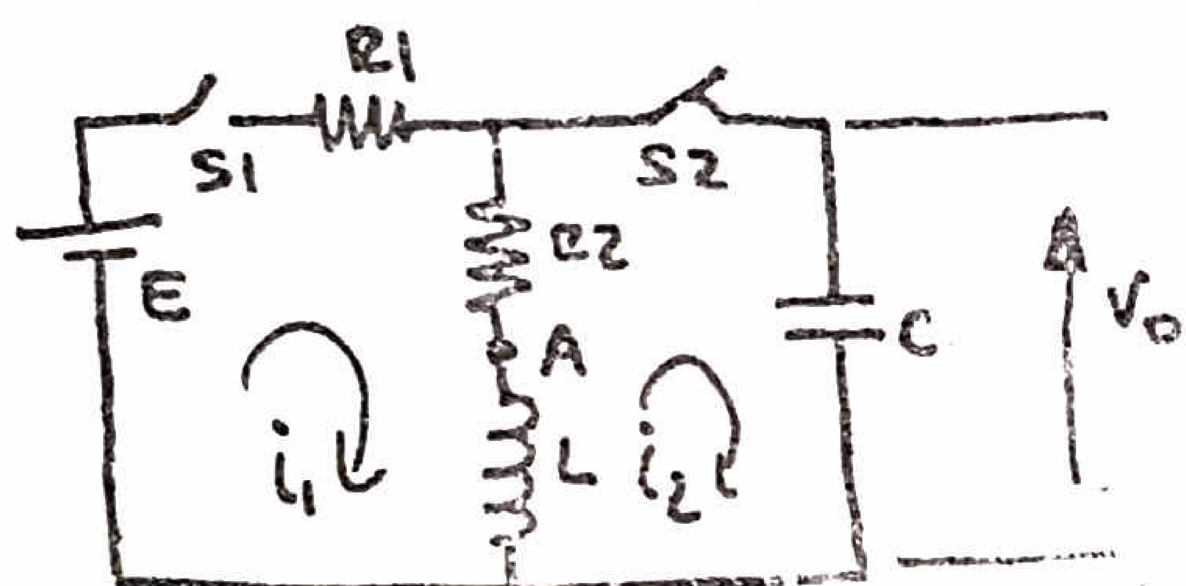
$x_{(t=0)} = 2 + A \operatorname{sen}\theta = 0$
$x'_{(t=0)} = -2A \operatorname{sen}\theta + 2A\cos\theta = 0$ } (Inicialmente en reposo)

$$\theta = 45° \qquad A = -2\sqrt{2}$$

Por tanto

$$x = 2 - 2\sqrt{2}\, e^{-2t} \operatorname{sen}(2t + 45°)$$

(17) El interruptor S_1 está abierto, el S_2 cerrado y no hay energía almacenada en el circuito: a) Encontrar $V_o(t)$ cuando S_1 se cierra. b) Se abre S_2 0,001 sg después de cerrarse S_1. Encontrar la corriente en la bobina. c) S_2 se cierra 0,002 sg. después de haberse abierto. Encontrar $V_o(t)$



$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 1\,\Omega$
$L = 1\,H$
$C = 1\,F = 1\,F$
$E = 10\,V.$

Se cierra S_1.

Por nudos, tenemos

$$(1)\begin{cases} 0 = -\frac{1}{R_1}E + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+CD\right)V_o - \frac{1}{R_2}V_A \\ 0 = -\frac{1}{R_2}V_o + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{LD}\right)V_A \end{cases}$$

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1}E & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{LD} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+CD & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{LD} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{E}{R_1}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{LD}\right)}{\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_1LD}+\frac{1}{R_2LD}+\frac{CD}{R_2}+\frac{C}{L}}$$

$$V_o = \frac{E(LD+R_2)}{LD+R_2+R_1+R_1LCD^2+R_1R_2CD}$$

$$\left[R_1LCD^2+(L+R_1R_2C)D+R_1+R_2\right]V_o = (LD+R_2)E$$

$$\left[D^2+2D+2\right]V_o = 10$$

a) Solución homogénea.

$$D^2+2D+2=0 \qquad D = -1\pm j$$

b) Solución particular

$$V_{o_p} = \frac{10}{2} = 5\ V.$$

(17) sigue

c) Solución total

$$V_o = V_{op} + V_{ou} = 5 + A e^{-t} \operatorname{sen}(t+\theta)$$

$$V_o(t=0) = 0 = A \operatorname{sen}\theta + 5$$

$$V'_o(t=0) = \left[DV_o\right]_{t=0} = \left[\frac{1}{R_1}E + \frac{1}{R_2}V_A - \frac{1}{R_1}V_o - \frac{1}{R_2}V_o\right]\frac{1}{C}\Bigg|_{t=0} = \frac{1}{CR_1}E \qquad \text{(De Ec. 1)}$$

ya que $V_{A(t=0)} = V_{o(t=0)} = 0$

$$\begin{cases} V_o(t=0) = 0 = A \operatorname{sen}\theta + 5 \\ V'_o(t=0) = 10 = -A \operatorname{sen}\theta + A\cos\theta = A(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) \end{cases}$$

$$\theta = -45^\circ \qquad A = 5\sqrt{2}$$

Por tanto

$$\underline{V_o = 5 + 5\sqrt{2}\, e^{-t} \operatorname{sen}(t \mp 45^\circ)} \qquad (2)$$

La corriente en la bobina es entre tanto

$$(R_2 + LD)\, i = V_o$$

$$i = \frac{V_o}{R_2 + LD} = \frac{1}{R_2 + LD}\left[5 + 5\sqrt{2}\, e^{-t} \operatorname{sen}(t - 45^\circ)\right]$$

Para $t = 0{,}001$ sg.

$$i_{t=0{,}001\,sg} = \frac{1}{R_2 + LD}\left[5 + 5\sqrt{2}\, e^{-0{,}001} \operatorname{sen}\left(0{,}001\,\text{rad} - 45^\circ\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{R_2 + LD}\left[5 \mp 5\sqrt{2} \times 0{,}999 \times 0{,}706\right] = \frac{1}{R_2 + LD}\, 0{,}01$$

(17) sigue

c) solución total

$$V_o = V_{op} + V_{on} = 5 + Ae^{-t}\,\text{sen}\,(t+\theta)$$

$$V_o(t=0) = 0 = A\,\text{sen}\,\theta + 5$$

$$V'(t=0) = [DV_o]_{t=0} = \left[\frac{1}{R_1}E + \frac{1}{R_2}V_A - \frac{1}{R_1}V_o - \frac{1}{R_2}V_o\right]_{t=0}\frac{1}{C} = \frac{1}{CR_1}E \qquad \text{(De Ec. 1)}$$

ya que $V_{A_{t=0}} = V_{o_{t=0}} = 0$

$$\begin{cases} V_o(t=0) = 0 = A\,\text{sen}\,\theta + 5 \\ V'_o(t=0) = 10 = A(\cos\theta - \text{sen}\,\theta) \end{cases} \qquad \begin{matrix} \theta = -45^\circ \\ A = 5\sqrt{2} \end{matrix}$$

Por tanto:

$$\underline{V_o = 5 + 5\sqrt{2}\,e^{-t}\,\text{sen}\,(t-45^\circ)}$$

La corriente en la bobina es:

$$i = \frac{1}{R_2+LD}V_o = \frac{1}{R_2+LD}\left[5 + 5\sqrt{2}\,e^{-t}\,\text{sen}\,(t-45^\circ)\right] =$$

$$= \frac{1}{R_2+LD}5 + \frac{1}{R_2+LD}5\sqrt{2}\,e^{-t}\,\text{sen}\,(t-45^\circ) = i_1 + i_2$$

$$i_2 = \frac{1}{R_2+LD}5\sqrt{2}\,e^{-t}\,\text{sen}\,(t-45^\circ) = \frac{1}{D+1}5\sqrt{2}\,e^{-t}\,\text{sen}\,(t-45^\circ) =$$

$$= e^{-t}\frac{1}{D}5\sqrt{2}\,\text{sen}\,(t-45^\circ) = -5\sqrt{2}\,e^{-t}\cos(t-45^\circ)$$

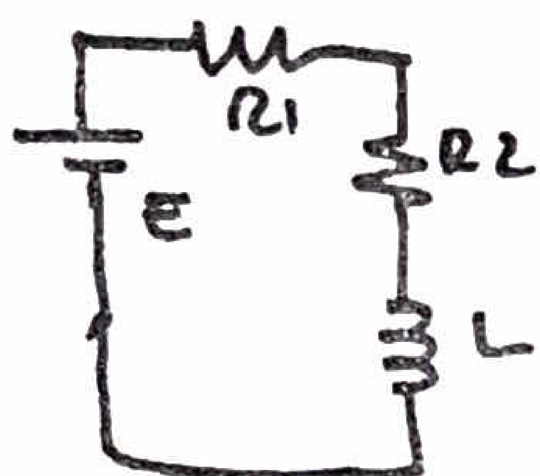
$$i_1 = \frac{1}{D+1}5 = 5$$

$$i = i_1 + i_2 = 5 - 5\sqrt{2}\,e^{-t}\cos(t-45^\circ)$$

$$i_{(t=0{,}001)} = 5 - 5\sqrt{2}\,e^{-0{,}001}\cos\left(\frac{0{,}001\times 360}{2\pi} - 45^\circ\right) = 2{,}78\times 10^{-5}\text{ A.}$$

(17) Sigue

Abrimos S_2



$$i_L = \frac{1}{R_1 + R_2 + LD} E$$

$$i_L = i_p + i_h$$

$$i_p = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10}{2} = 5$$

a) Calculo de i_h.

$$R_1 + R_2 + LD = 0 \qquad D = -\frac{R_1 + R_2}{L} = -2$$

$$i_h = C_1 e^{-2t_2}$$

Por tanto

$$i_L = i_p + i_h = C_1 e^{-2t} + 5$$

$$i_{(t=0)} = C_1 + 5 = 2{,}78 \times 10^{-5}$$

$$C_1 = -4{,}999972 \text{ A}$$

Por lo que

$$i_L = C_1 e^{-2(t-0{,}001)} + 5 = -4{,}99 e^{-2(t-0{,}001)} + 5$$

, pues tomamos como origen de tiempos el instante de ~~apertura~~ cierre de S_1.

c) Se cierra S_2 nuevamente. Tenemos nuevamente las dos mallas iniciales y la misma ecuación diferencial inicial.

$$[D^2 + 2D + 2] V_0 = 10$$

$$V_0 = 5 + A_1 e^{-t_1} \operatorname{sen}(t_1 + \varphi)$$

$$V_{o(t=0)} = 5 + 5\sqrt{2}\, e^{-0,001} \operatorname{sen}\left(\frac{0,36}{2\pi} - 45^\circ\right)$$, obtenida de (2) haciendo $t = 0,001$

$$V_{o\,(t=0)} = 0,010045 \text{ v.}$$

$$V'_{o}(t_1=0) = \left[D V_o\right]_{t_1=0} = \left[\frac{1}{R_1} E + \frac{1}{R_2} V_A - \frac{1}{R_1} V_o - \frac{1}{R_2} V_o\right]_{t_1=0} \frac{1}{C}$$

$$V_{A\,t_1=0} = V_{o\,t_1=0} - i_L R_{2\,t_1=0} = 0,010045 - 0,0299 = -0,01986 \text{ v.}$$

$$V'_{o}(t_1=0) = \left[10 \mp 0,01986 - 0,010045 - 0,010045\right] = 9,86005$$

$$\begin{cases} V_o(t_1=0) = 0,010045 = A_1 \operatorname{sen}\varphi + 5 \\ V'_o(t_1=0) = 9,86005 = A_1(\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \end{cases}$$

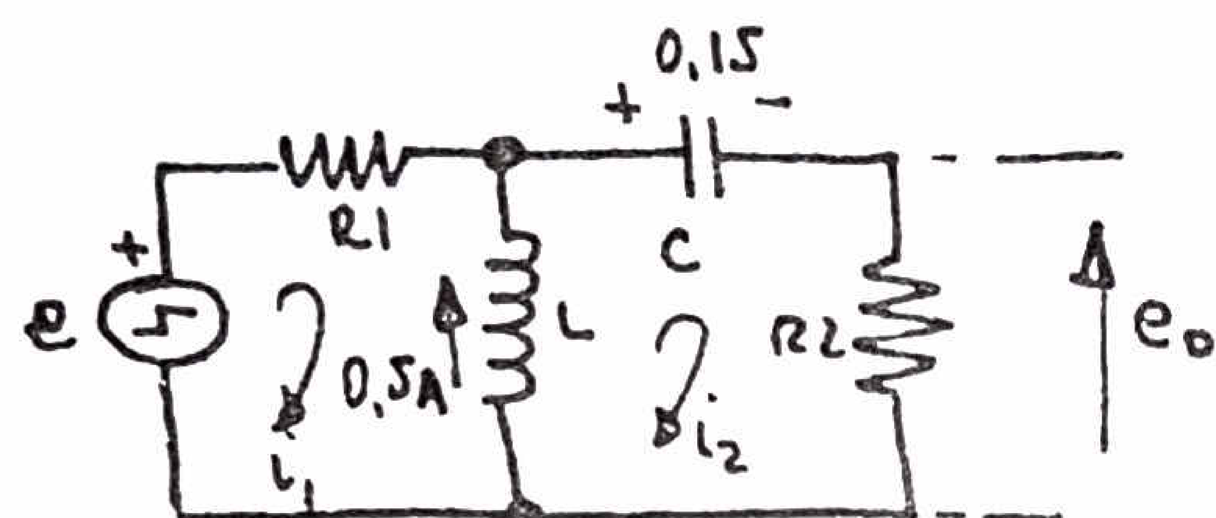
$$A = 6,973 \qquad \varphi = -45,7^\circ$$

$$V_o = 5 + 6,973\, e^{-t_1} \operatorname{sen}(t_1 + \varphi) = \underline{5 + 6,973\, e^{-(t-0,003)} \operatorname{sen}\left[(t-0,003) - 45,7^\circ\right]}$$

si tomamos como origen de tiempos el instante de cierre S_1.

(18)

Calcular en el circuito de la figura la respuesta $e_o(t)$ a una excitación en forma de escalón unidad, aplicada en el instante $t=0$. Las condiciones iniciales son según se indican en la figura.



$R_1 = R_2 = 1\,\Omega$

$L = 2\,H$

$C = 2\,F$

Aplicando mallas obtenemos.

$$\left.\begin{aligned}(R_1+LD)i_1 - LD i_2 &= e\\ -LDi_1 + \left(LD+\frac{1}{CD}+R_2\right)i_2 &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+LD & e \\ -LD & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+LD & -LD \\ -LD & LD+\frac{1}{CD}+R_2\end{vmatrix}} = \frac{LDe}{R_1LD+\frac{R_1}{CD}+R_1R_2+\frac{L}{C}+LR_2D} = \frac{LCD^2e}{(R_1LC+R_2LC)D^2+(R_1R_2C+L)D+R_1}$$

$$\left[(R_1LC+R_2LC)D^2+(R_1R_2C+L)D+R_1\right]i_2 = LCD^2e$$ ó también.

$$\left[\left(\frac{R_1}{R_2}LC+LC\right)D^2+\left(R_1C+\frac{L}{R_2}\right)D+\frac{R_1}{R_2}\right]R_2i_2 = LCD^2e$$ ya que $\underline{R_2i_2 = e_o}$

Sustituyendo valores, tenemos

$$(8D^2+4D+1)e_o = LCD^2e = 0$$ ya que $\underline{D^2e = 0}$

$$8D^2+4D+1 = 0 \Longrightarrow D = -\frac{1}{4} \pm j\frac{1}{4}$$

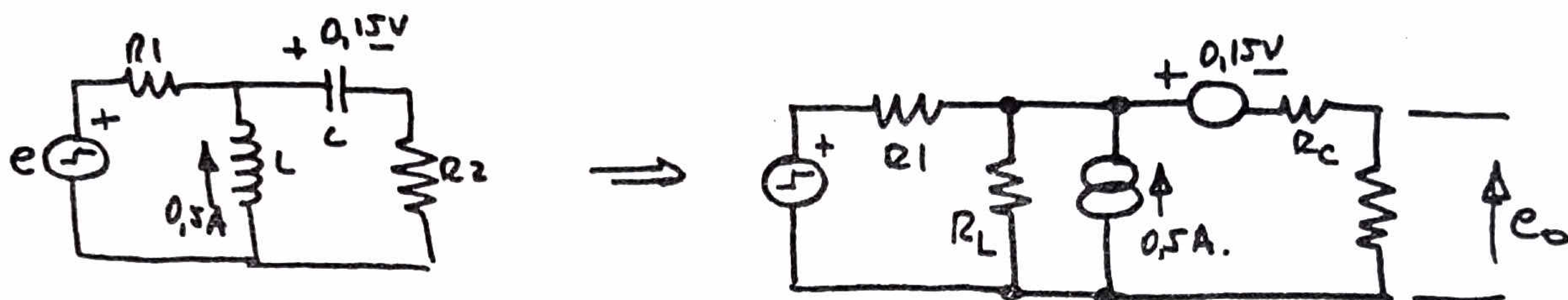
Por tanto.

$$e_o = Ae^{-\frac{1}{4}t}\cos\left(\frac{1}{4}t+\theta\right)$$

$$e_{o(t=0^+)} = A\cos\theta.$$

$$(De_o)_{(t=0^+)} = -\frac{1}{4}A\cos\theta - \frac{1}{4}A\,\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{1}{4}A(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)$$

Cálculo de las condiciones iniciales.

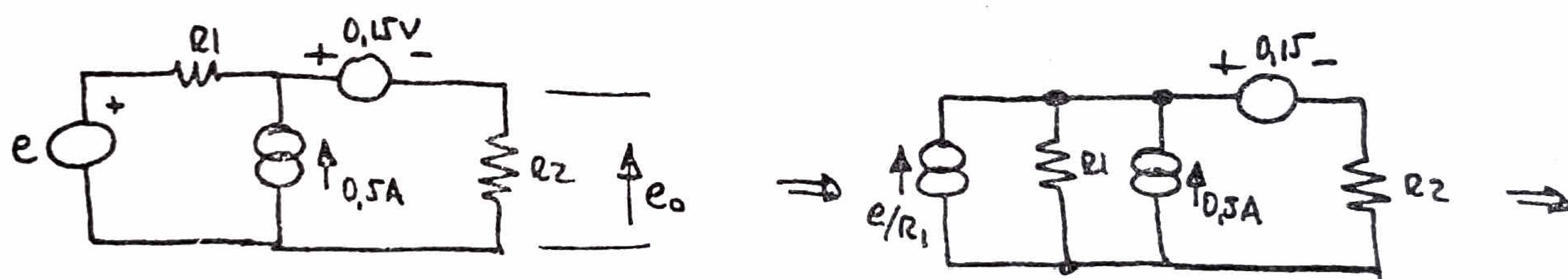


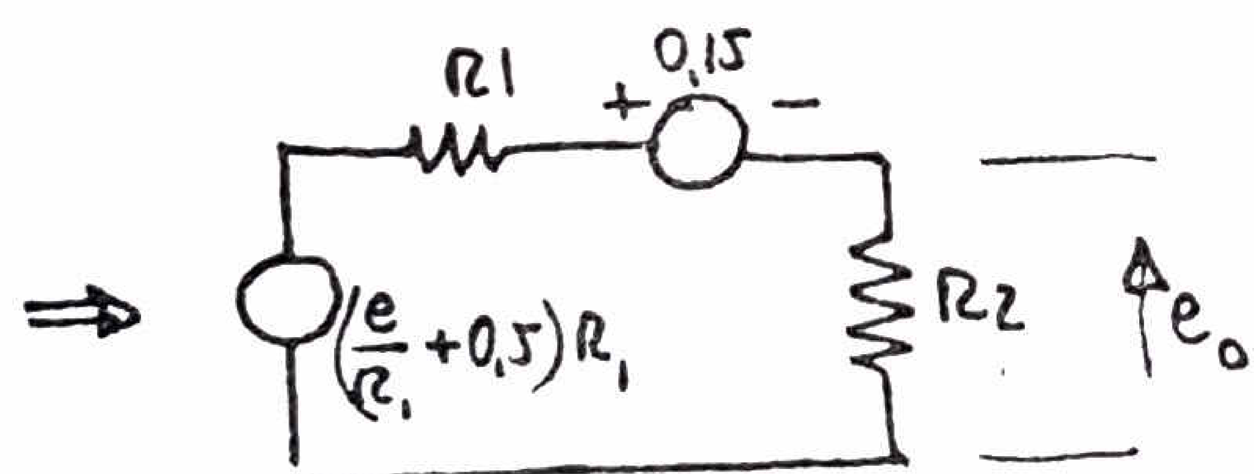
Debemos calcular $e_{(0)}$ en el tiempo $t=(0^+)$, un infinitésimo de tiempo después de conectar el generador.

$R_L = \infty$, en el tiempo $t=0^+$

$R_C = 0$, en el tiempo $t=0^+$

Por tanto





$$e_{o\,(t=0^+)} = \frac{\left(\frac{e}{R_1}+0{,}5\right)R_1 - 0{,}15}{R_1+R_2}\,R_2$$

$$e_o\,(t=0^+) = \frac{1+0{,}5-0{,}15}{2}\cdot 1 = \underline{0{,}675\ \text{v}}$$

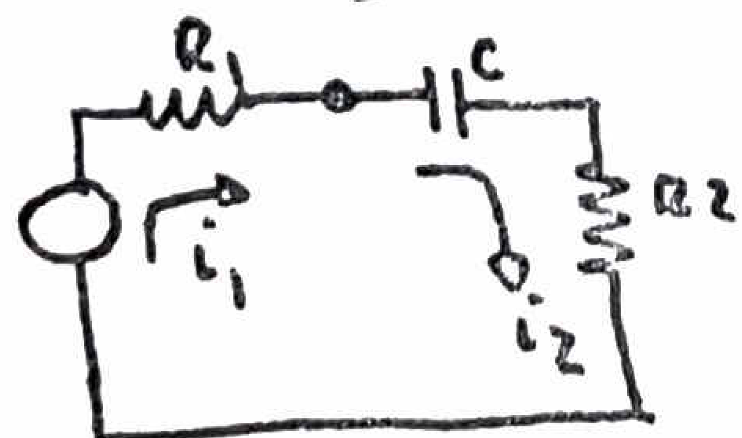
Para calcular $De_{o(t=0^+)}$, hagamos lo siguiente:

De la segunda ecuación del sistema inicial despejamos $Di_L = Di_2 - Di_1$

$L\,Di_2 - L\,Di_1 = -\left(\frac{1}{CD} + R_2\right) i_2$ para $t=0^+$, Tenemos

$L\,Di_{L(t=0^+)} = -(0{,}15 + 0{,}675) = -0{,}825\ \text{V}$

$Di_L = Di_2 - Di_1 = -\frac{0{,}825}{2} = -0{,}412\ \text{A/sg.}$



$e = R_1 i_1 + \frac{1}{CD} i_2 + R_2 i_2$

$De = 0 = R_1 Di_1 + \frac{1}{C} i_2 + R_2 Di_2 =$

$= R_1 Di_1 + \frac{1}{C} i_2 + De_o$ ya que $\underline{e_o = R_2 i_2}$

18 sigue

$$0 = R_1 D i_1 + \frac{1}{C} i_2 + R_2 D i_2 = R_1 \left(D i_2 + 0,412 \right) + \frac{1}{C} i_2 + R_2 D i_2$$

$$0 = (R_1 + R_2) D i_2 + 0,412 R_1 + \frac{1}{C} i_2$$

Para $t = 0^+$, tenemos

$$(R_1 + R_2) \left(D i_2 \right)_{(t=0^+)} + 0,412 R_1 + \frac{1}{C} i_{2\,(t=0^+)} = 0$$

$$\left(D i_2 \right)_{(t=0^+)} = \frac{-0,412 - \frac{0,675}{2}}{2} = -0,375 \ \text{A}/\text{s}.$$

y por tanto,

$$\left(D e_0 \right)_{(t=0^+)} = R_2 \left(D i_2 \right)_{(t=0^+)} = -0,375 \ \text{V}/\text{sg}$$

Tenemos finalmente que:

$$\left.\begin{array}{l} 0,675 = A \cos\theta \\ -0,375 = -\frac{1}{4} A \left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \right) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1,066 \\ \theta = 50^\circ \, 43' \end{array}$$

Por tanto, la expresión de la tensión en bornes de R_2 es:

$$\underline{e_0 = 1,066 \, e^{-\frac{1}{4}t} \cdot \cos\left(\frac{1}{4}t + 50^\circ 43' \right)}$$

(19) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, suponiendo condiciones iniciales nulas.

a) $D^2x + 9x = 1$

b) $D^2x + 5Dx + 4x = 8$

c) $D^2x + Dx + 4,25x = t+1$

d) $D^3x + D^2x + 4Dx + 4x = 10 \operatorname{sen} 10t$

a) $D^2x + 9x = 1$

Homogénea

$D^2 + 9 = 0$ $\qquad D = \pm 3j$

Particular

$x_p = \frac{1}{9}$

Por tanto:

$x = x_p + x_h = \frac{1}{9} + A \operatorname{sen}(3t + \theta)$

$x' = 3A\cos(3t + \theta)$

$\left.\begin{array}{l} x_{(t=0)} = \frac{1}{9} + A \operatorname{sen}\theta = 0 \\ x'_{(t=0)} = 3A\cos\theta = 0 \end{array}\right\}$ $\qquad \theta = 90°$, $\quad A = -\frac{1}{9}$

$x = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\operatorname{sen}(3t + 90°) = \frac{1}{9}[1 - \cos 3t]$

b) $D^2 + 5Dx + 4x = 8$

Homogénea

$D^2 + 5D + 4 = 0$ $\qquad D = 1, -4$

Particular

$x_p = \frac{8}{4} = 2$

(19) Sigue

Por tanto

$$x = x_p + x_h = 2 + c_1 e^{-4t} + c_2 e^{t}$$

$$x' = -4c_1 e^{-4t} + c_2 e^{t}$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 2 + c_1 + c_2 = 0 \\ x'(0) &= -4c_1 + c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} c_1 &= -\frac{2}{5} \\ c_2 &= -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$x = -\frac{8}{5} e^{t} - \frac{2}{5} e^{-4t} + 2$$

---

c) $D^2x + Dx + 4{,}25x = t + 1$

Homogénea

$$D^2 + D + 4{,}25 = 0 \qquad D = -\frac{1}{2} \pm i2$$

Particular.

$$x = \frac{1}{D^2 + D + 4{,}25}(t+1) = \left(\frac{1}{4{,}25} - \frac{1}{4{,}25^2}D + \ldots\right)(t+1) =$$

$$= \frac{1}{4{,}25}(t+1) - \frac{1}{4{,}25^2} = \frac{1}{4{,}25}t + \frac{3{,}25}{4{,}25^2}$$

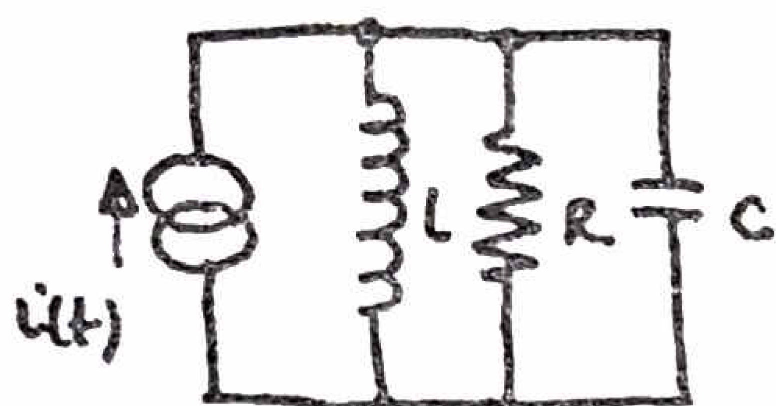
Por tanto.

$$x = x_p + x_h = Ae^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}(2t+\theta) + \frac{1}{4{,}25}t + \frac{3{,}25}{4{,}25^2}$$

$$x' = -\frac{1}{2}Ae^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}(2t+\theta) + 2Ae^{-\frac{1}{2}t}\cos(2t+\theta) + \frac{1}{4{,}25}$$

$$\left\{\begin{aligned} x(0) &= A\operatorname{sen}\theta + \frac{3{,}25}{4{,}25^2} = 0 \\ x'(0) &= -\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\theta + 2A\cos\theta + \frac{1}{4{,}25} = 0 \end{aligned}\right.$$

(20) En el circuito de la figura hallar $e_0(t)$ como respuesta a la excitación $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ aplicada en $t=0$. Se supone el circuito inicialmente en reposo y el valor de R se determina por la condición de amortiguamiento crítico.



$L = 200 \mu H$

$I_0 = 7{,}5 \, mA$

$C = 12{,}5 \, pF$

$\tau = 6 \times 10^{-8}$ sg.

$$i(t) = \left(\frac{1}{LD} + CD + \frac{1}{R}\right) e_0(t)$$

$$\left(LCD^2 + \frac{L}{R} D + 1\right) e_0(t) = LD\, i(t)$$

Amortiguamiento crítico: $\zeta = 1$

$$2\frac{\zeta}{\omega_n} = \frac{L}{R} \qquad R = \frac{\omega_n L}{2\zeta} = \frac{L}{2\zeta}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$R = \sqrt{\frac{200 \times 10^{-6}}{12{,}5 \times 10^{-12}}} \cdot \frac{1}{2} = 2000\,\Omega.$$

$$\left(LCD^2 + \frac{L}{R} D + 1\right) e_0(t) = LD\, I_0 e^{-t/\tau} = -\frac{L}{\tau} I_0 e^{-t/\tau}$$

Solución homogénea

$$LCD^2 + \frac{L}{R} D + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{1,2} = -2 \times 10^7$$

Solución particular

$$e_{op} = \frac{1}{LCD^2 + \frac{L}{R} D + 1}\left(-\frac{L}{\tau} I_0 e^{-t/\tau}\right) = -\frac{L}{\tau} \frac{1}{LC\frac{1}{\tau^2} - \frac{L}{R}\frac{1}{\tau} + 1} I_0 e^{-t/\tau} = -900\, e^{-t/6 \times 10^{-8}}$$

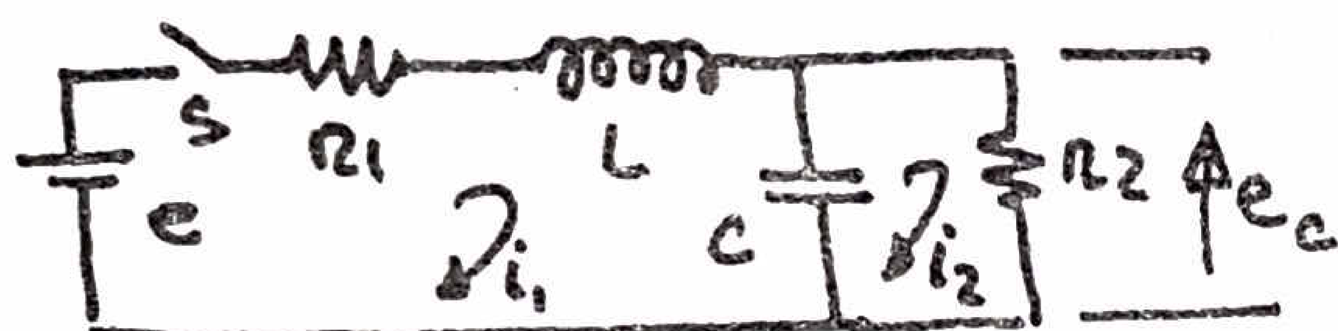
Solución total.

$$e_0(t) = C_1 e^{-2 \times 10^7 t} + C_2 t e^{-2 \times 10^7 t} - 900\, e^{-t/6 \times 10^{-8}}$$

$$\left.\begin{aligned} e_0(t=0) &= C_1 - 900 = 0 \\ (De_0)(t=0) &= \frac{I_0}{C} = -2 \times 10^7 C_1 + C_2 + \frac{900}{6 \times 10^{-8}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= 900 \\ C_2 &= 36 \times 10^8 \end{aligned}$$

$$e_0 = \left(900 + 36 \times 10^8 t\right) e^{-2 \times 10^7 t} - 900\, e^{-\frac{t}{6 \times 10^{-8}}}$$

(21) En el circuito de la figura estando c descargado, se cierra el interruptor en el instante t=0 y vuelve a abrirse 0,01 sg. después. Calcular $e_c(t)$ a partir de la apertura del interruptor.



$R_1 = 250\,\Omega$
$R_2 = 750\,\Omega$
$C = 63\,\mu F$
$L = 0,86\,H$

$E_1 = 54\,v.$

Cuando abrimos S tenemos una sola malla en donde

$$\left(\frac{1}{CD} + R_2\right) i_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1 + R_2 C D) i_2 = 0$$

$$D = -\frac{1}{R_2 C}$$ por lo que

$$e_c(t_1) = R_2 i_2(t) = R_2 A_1 e^{-t_1/R_2C}$$

En esta ecuación t_1 es el tiempo a partir de la apertura del interruptor. Si empezamos a contar a partir del origen de tiempos t=0, tendremos

$$e_c(t) = R_2 A e^{-\frac{t-0,01}{R_2C}} = A_0 e^{-\frac{t-0,01}{R_2C}} \qquad A_0 = R_2 A$$

Para evaluar A_0 llamamos

$$e_c(t=0,01) = A_0 \qquad (1)$$

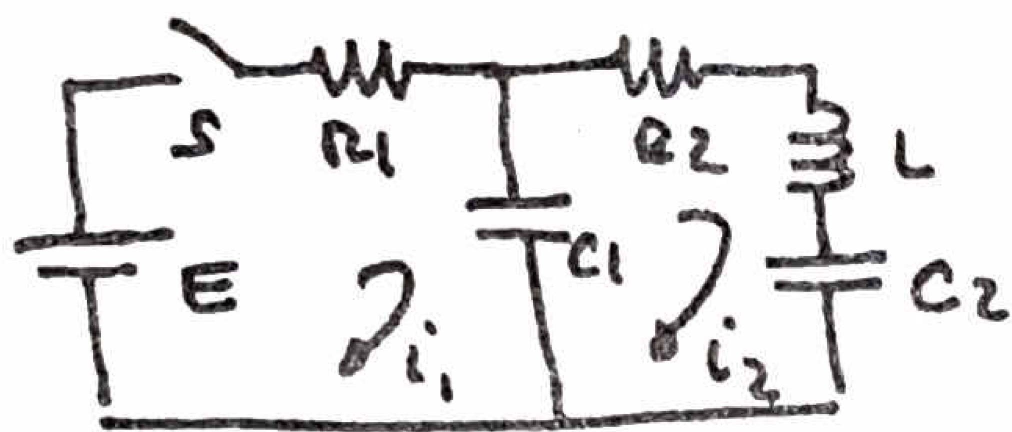
Deberemos calcular el valor de la tensión en el condensador en el tiempo t=0,01.

Consideremos ahora las dos mallas obtenidas al cerrar S entre el tiempo t=0 y el t=0,01 sg.

$$\begin{cases} E_1 = \left(R_1 + LD + \frac{1}{CD}\right) i_1 - \frac{1}{CD} i_2 \\ 0 = -\frac{1}{CD} i_1 + \left(\frac{1}{CD} + R_2\right) i_2 \end{cases}$$

$$i_2 = \frac{\frac{1}{CD} E}{\frac{R_1}{CD} + R_1 R_2 + \frac{L}{C} + L R_2 D + \frac{R_2}{CD}} = \frac{E}{LCR_2 D^2 + (R_1 R_2 C + L) D + R_1 + R_2}$$

(22) En el circuito de la figura calcular $i_{2(t)}$ cuando se cierra el interruptor en el tiempo $t=0$. (C_1 y C_2 descargados).



$R_1 = 10\,\Omega$

$R_2 = 15\,\Omega$ $\qquad$ $E = 10\,V.$

$L = 1\,H$

$C_1 = C_2 = 0{,}001\,F.$

$$\begin{cases} E = \left(R_1 + \frac{1}{C_1 D}\right) i_1 - \frac{1}{C_1 D} i_2 \\ 0 = -\frac{1}{C_1 D} i_1 + \left(R_2 + LD + \frac{1}{C_1 D} + \frac{1}{C_2 D}\right) i_2 \end{cases} \qquad (1)$$

$$i_2 = \frac{\frac{1}{C_1 D} E}{R_1 R_2 + R_1 L D + \frac{R_1}{C_1 D} + \frac{R_1}{C_2 D} + \frac{R_2}{C_1 D} + \frac{L}{C_1} + \frac{1}{C_1 C_2 D^2}}$$

$$\left[R_1 R_2 C_1 L D^3 + (R_1 R_2 C_1 C_2 + L C_2) D^2 + (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_2) D + 1\right] i_2 = C_2 D E = 0$$

Sustituyendo valores tenemos

$$\left[10^{-5} D^3 + 1{,}15 \times 10^{-3} D^2 + 3{,}5 \times 10^{-2} D + 1\right] i_2 = 0$$

$$i_{2p} = 0$$

Solución homogénea

$$\left[10^{-5} D^3 + 1{,}15 \times 10^{-3} D^2 + 3{,}5 \times 10^{-2} D + 1\right] = \left[D + \frac{10^2}{1{,}1342}\right]\left[10^{-5} D^2 + 0{,}268 \times 10^{-3} D + 1{,}134 \times 10^{-2}\right]$$

$$10^{-5} D^2 + 0{,}268 \times 10^{-3} D + 1{,}134 \times 10^{-2} = 0$$

$$D = -13{,}4 \pm j\,30{,}9.$$

Por tanto:

$$i_2 = A_1 e^{-\frac{10^2}{1{,}1342} t} + A_2 e^{-13{,}4 t} \cos(30{,}9 t + \theta)$$

Cálculo de las constantes A_1, A_2 y θ.

$$i_2(0) = A_1 + A_2 \cos\theta = 0$$

$$(D i_2)(0) = -\frac{10^2}{1{,}1342} A_1 - 13{,}4 A_2 \cos\theta - 30{,}9 A_2 \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$(D^2 i_2)(0) = \frac{10^4}{(1{,}1342)^2} A_1 - 775{,}[illegible]\, A_2 \cos\theta + 828{,}12\, A \operatorname{sen}\theta = \frac{E}{C_1 L R_1} = 1000$$

(22) Sigue

Cálculo de $i_2\big|_{t=0}$ $Di_2\big|_{t=0}$ $D^2 i_2\big|_{t=0}$

$i_2\big|_{t=0} = 0$ pues C_1 es un cortocircuito en el transitorio inicial

De la ecuación 1 del sistema inicial despejamos Di_2

$$L D i_2 = \frac{1}{C_1 D} i_1 - R_2 i_2 - \frac{1}{C_1 D} - \frac{1}{C_2 D}$$

$$Di_2\big|_{t=0} = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{C_1 D} i_1 - R_2 i_2 - \frac{1}{C_1 D} - \frac{1}{C_2 D}\right]_{t=0}$$

$\frac{1}{C_1 D} i_1 - \frac{1}{C_1 D} i_2\big|_{t=0} = 0$ ⇒ C_1 inicialmente descargado

$R_2 i_2\big|_{t=0} = 0$ ya que $i_2\big|_{t=0} = 0$

$\frac{1}{C_2 D} i_2\big|_{t=0} = 0$ ya que C_2 inicialmente descargado.

Por tanto.

$$Di_2\big|_{t=0} = 0$$

Si derivamos esta misma ecuación 1, tenemos

$$0 = -\frac{1}{C_1} i_1 + R_2 D i_2 + L D^2 i_2 + \frac{1}{C_1} i_2 + \frac{1}{C_2} i_2$$

Por tanto.

$$D^2 i_2\big|_{t=0} = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{C_1} i_1 - R_2 D i_2 - \frac{1}{C_1} i_2 - \frac{1}{C_2} i_2\right]_{t=0}$$

$i_2\big|_{t=0} = 0$ $Di_2\big|_{t=0} = 0$

$i_1(t=0) = \frac{E}{R_1}$. por tanto.

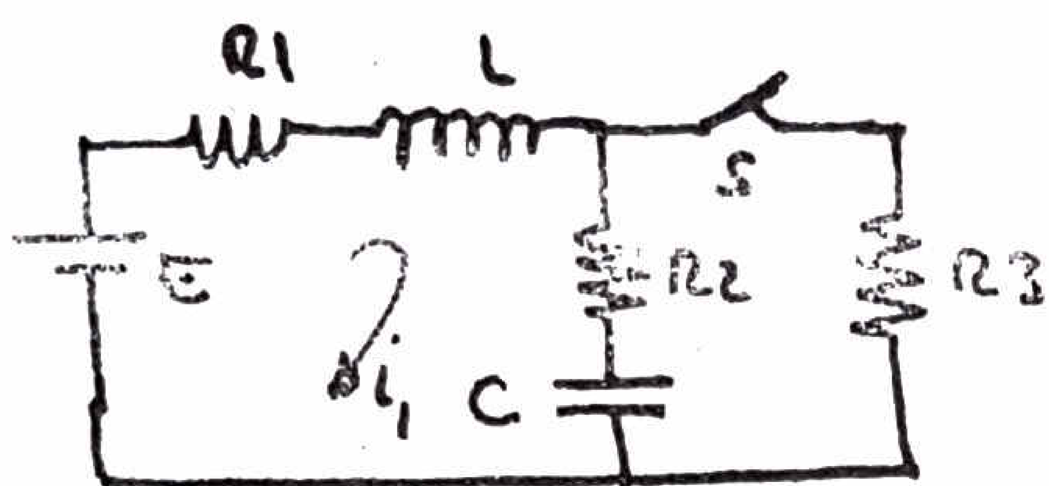
$$D^2 i_2\big|_{t=0} = \frac{1}{L C_1 R_1} E = 1000.$$

(22) Sigue.

$$\begin{cases} \Delta_1 + \Delta_2 \cos\theta = 0 \\ -88{,}17\Delta_1 - 13{,}4\,\Delta_2 \cos\theta - 30{,}9\,\Delta_2 \operatorname{sen}\theta = 0 \\ 7773{,}5\Delta_1 - 775{,}25\Delta_2 \cos\theta + 828{,}12\,\Delta_2 \operatorname{sen}\theta = 1000 \end{cases}$$

$\Delta_1 =$ $\Delta_2 =$ $\theta =$

(23) El circuito de la figura está en régimen permanente con el interruptor S cerrado. En el tiempo $t=0$ se abre S. Hallar la expresión de $i_1(t)$. Determinar el tiempo T_3 ($\pm 2\%$).



$R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\Omega$

$C = 1\,\mu F$

$L = 100\,H$

$E = 100\,V.$

Cuando se abre S, tenemos.

$$E = \left(R_1 + LD + R_2 + \frac{1}{CD}\right) i_1 \qquad (1)$$

$$\left[LC\,D^2 + C(R_1+R_2)D + 1\right] i_1 = CDE$$

Sustituyendo valores obtenemos.

$$\left[10^{-4} D^2 + 20\times10^{-6} D + 1\right] i_1 = CDE = 0.$$

$$D = -0{,}1 \pm j100 \qquad \text{(solución homogénea).}$$

Por tanto.

$$i_1 = A e^{-0{,}1t} \cos(100t + \theta) \qquad \text{(No existe solución particular).}$$

Cálculo de las constantes A y θ.

$$i_1\Big|_{t=0} = A\cos\theta = \frac{E}{R_1+R_3} = 5\,A.$$

De la ecuación 1 obtenemos

$$LDi_1 = E - R_1 i_1 - R_2 i_1 - \frac{1}{CD} i_1$$

$$Di_1\Big|_{t=0} = \left| E - R_1 i_1 - R_2 i_1 - \frac{1}{CD} i_1 \right|_{t=0} = -\frac{1}{CD} i_1\Big|_{t=0} = -\frac{ER_3}{R_1+R_3} = -5$$

ya que $R_1 i_1\big|_{t=0} = R_2 i_1\big|_{t=0}$

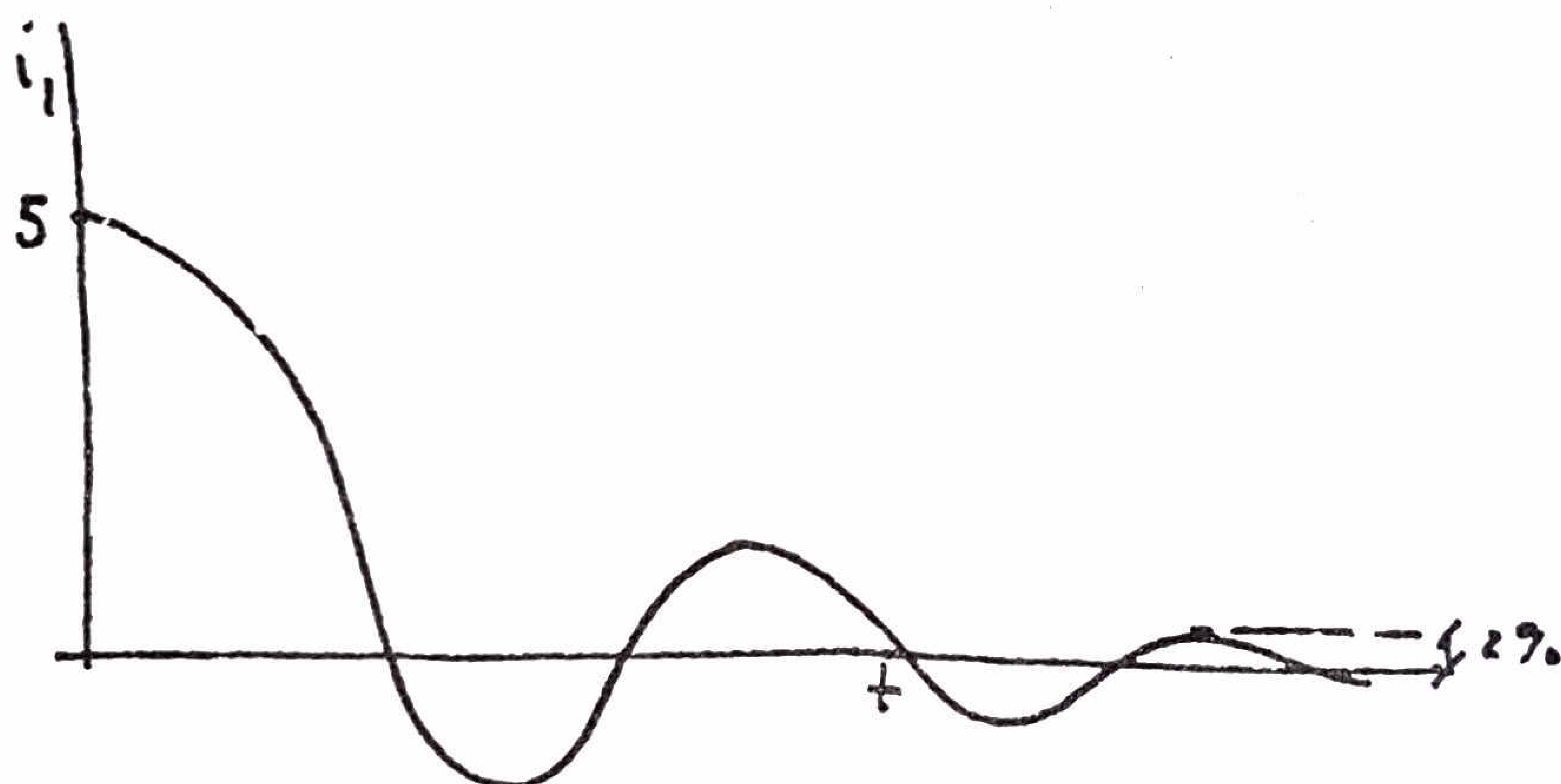
$\frac{1}{CD} i_1\Big|_{t=0} = \frac{ER_3}{R_1+R_3}$ pues el condensador durante el régimen permanente se ha cargado al valor de tensión dado por el divisor R_1/R_3.

23 – sigue

Por tanto, tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} A\cos\theta = 5 \\ -0{,}1\,A\cos\theta - 100A\,\text{sen}\,\theta = -5 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \theta = 0{,}51° \\ A = 5{,}0002 \end{array}$$

$$i_1 = 5{,}0002\, e^{-0{,}1t} \cos(100t + 0{,}51°)$$



2% de 5 = 0,1

$$5{,}0002\, e^{-0{,}1 T_s} = 0{,}1$$

$$e^{0{,}1 T_s} = 50{,}002$$

$$T_s = 39{,}12 \text{ sg}$$

24 /

Hallar las transformadas inversas de:

a) $F(s) = \dfrac{10}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}$ b) $F(s) = \dfrac{13}{s(s^2+4s+13)}$

a) $$F(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s^2+2s+2)} = \frac{A_{12}}{(s+1)^2} + \frac{A_{11}}{s+1} + \frac{A_2 s + A_3}{s^2+2s+2}$$

$$A_{12} = \left[\frac{10}{s^2+2s+2}\right]_{s=-1} = 10$$

$$A_{11} = \left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{10}{s^2+2s+2}\right]\right\}_{s=-1} = 0$$

$$\frac{A_2 s + A_3}{s^2+2s+2} = \frac{10}{(s+1)^2(s^2+2s+2)} - \frac{10}{(s+1)^2} = \frac{10 - 10s^2 - 20s - 20}{(s+1)^2(s^2+2s+2)} = -\frac{10}{s^2+2s+2}$$

Por tanto:

$$\frac{10}{(s+1)^2(s^2+2s+2)} = \frac{10}{(s+1)^2} - \frac{10}{s^2+2s+2} = \frac{10}{(s+1)^2} - \frac{10}{(s+1)^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)^2+1}\right] = 10te^{-t} + 10e^{-t}\operatorname{sen} t$$

b) $$F(s) = \frac{13}{s(s^2+4s+13)} = \frac{13}{s\left[(s+2)^2+3^2\right]}$$

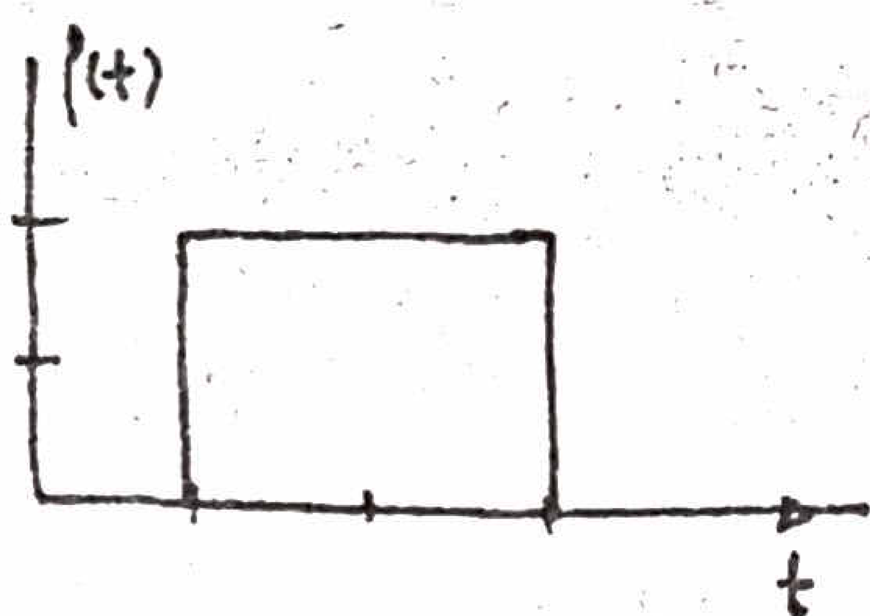
$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{13}{s\left[(s+2)^2+3^2\right]}\right] = 13\left[\frac{1}{13} - \frac{1}{13\sqrt{1-\frac{4}{13}}}e^{-2t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{13}\sqrt{1-\frac{4}{13}}\,t+\theta\right)\right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{3\sqrt{13}}e^{-2t}\operatorname{sen}(3t+\theta) \qquad \theta = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

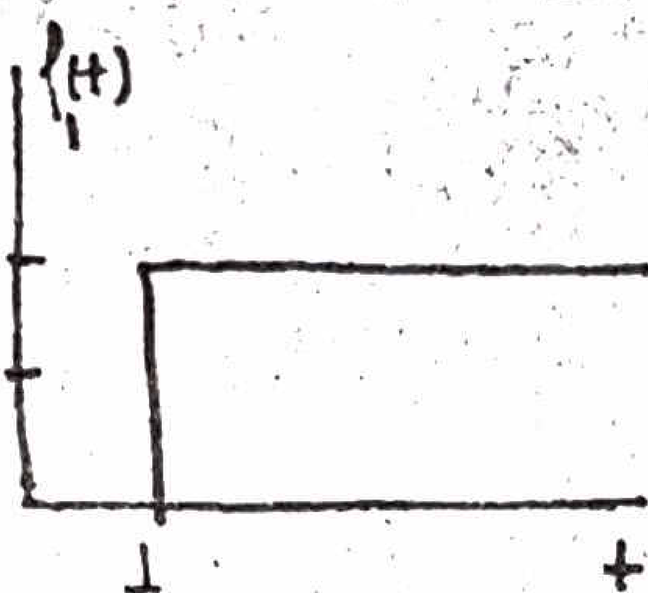
(Nº 27 de la tabla).

25 Los bocetos indican $f(t)$. Encontrar $F(s)$

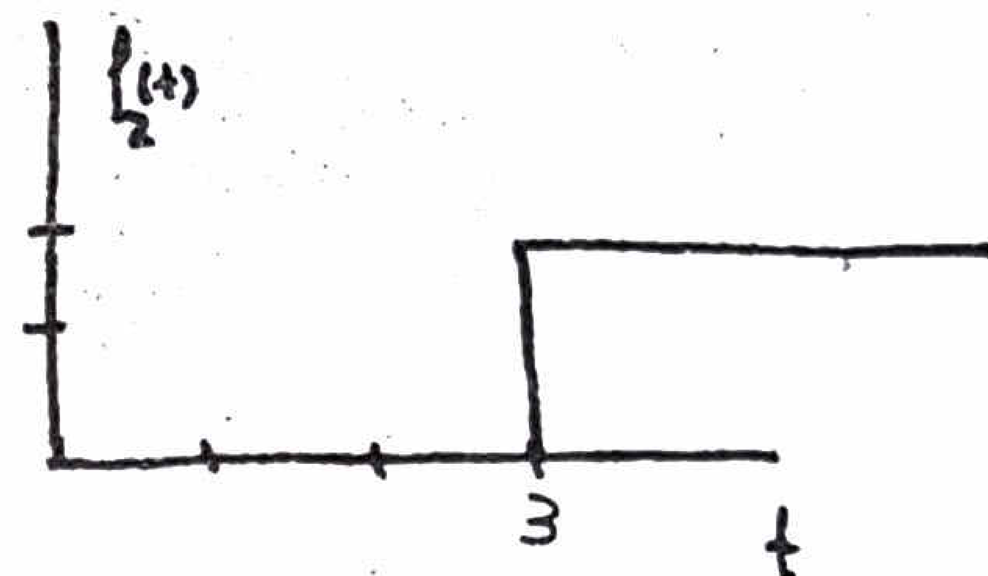
a)







−



$f(t) = f_1(t) - f_2(t)$

$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] - \mathcal{L}[f_2(t)]$

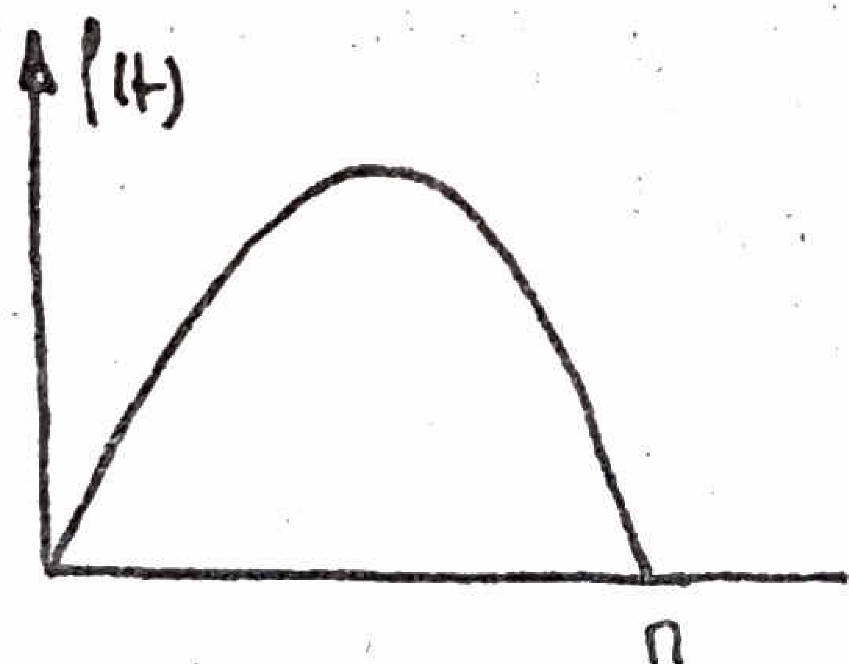
$f_1(t) = 2u_{-1}(t-1)$ $\qquad f_2(t) = 2u_{-1}(t-3)$

$\mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[2u_{-1}(t-1)] = \frac{2}{s}e^{-s}$

$\mathcal{L}[f_2(t)] = \mathcal{L}[2u_{-1}(t-3)] = \frac{2}{s}e^{-3s}$, por tanto

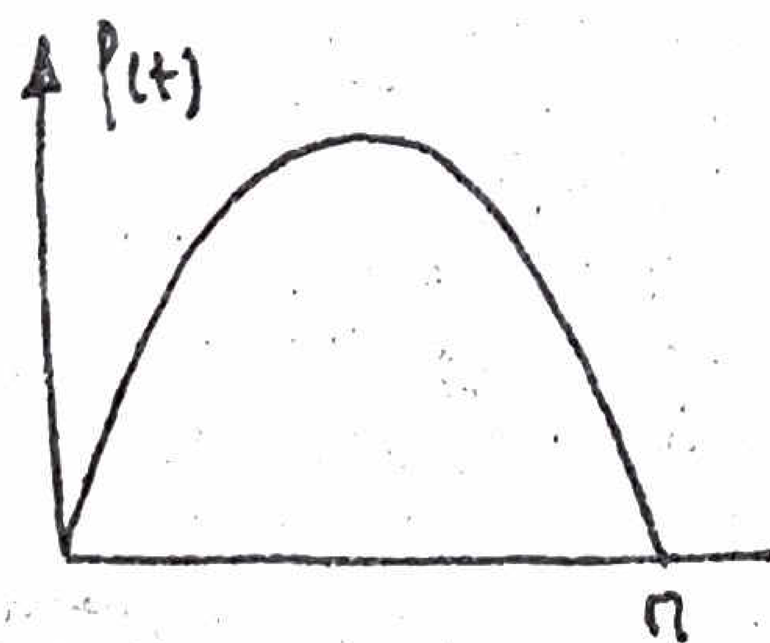
$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-3s} = \frac{2}{s}e^{-s}\left[1 - e^{-2s}\right]$

b)

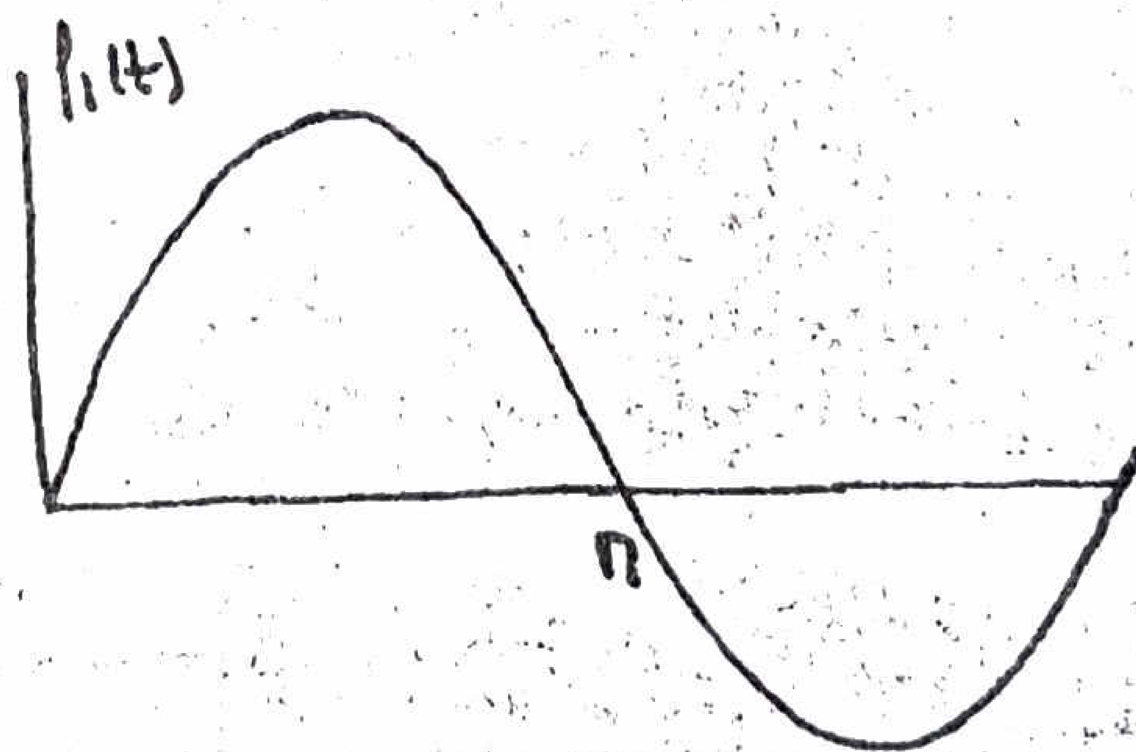


$f(t) = F_m \operatorname{sen} \omega t \qquad 0 \le \omega t \le \pi$

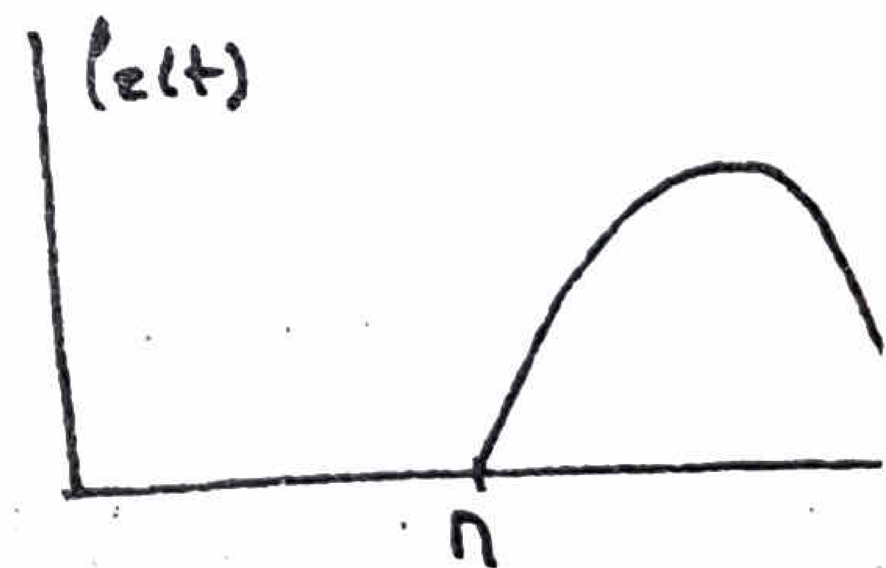
$f(t) = 0 \qquad \omega t > \pi$



=



+



$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$

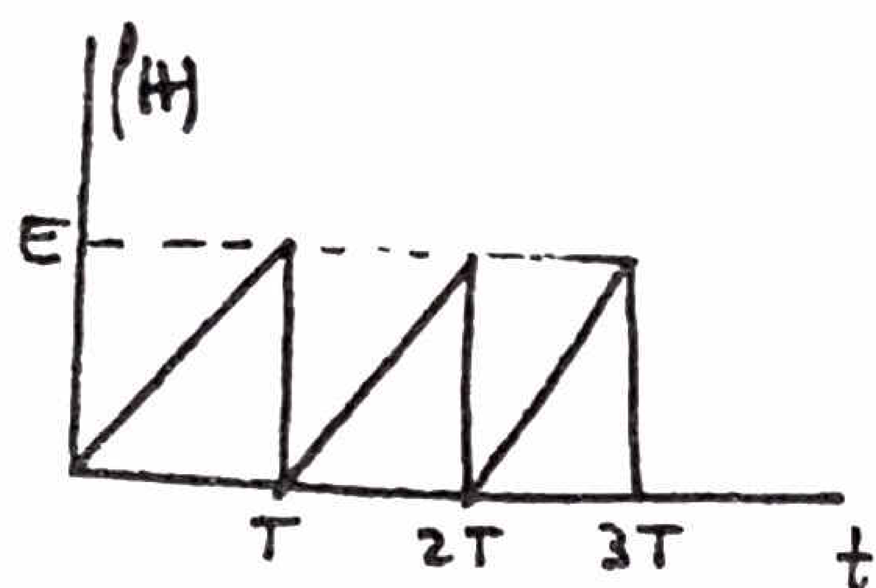
$f_1(t) = F_m \operatorname{sen} \omega t \qquad f_2(t) = F_m \operatorname{sen} \omega\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)$

$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{F_m \omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[f_2(t)] = \frac{F_m \omega}{s^2+\omega^2}e^{-\frac{\pi}{\omega}s}$, por tanto

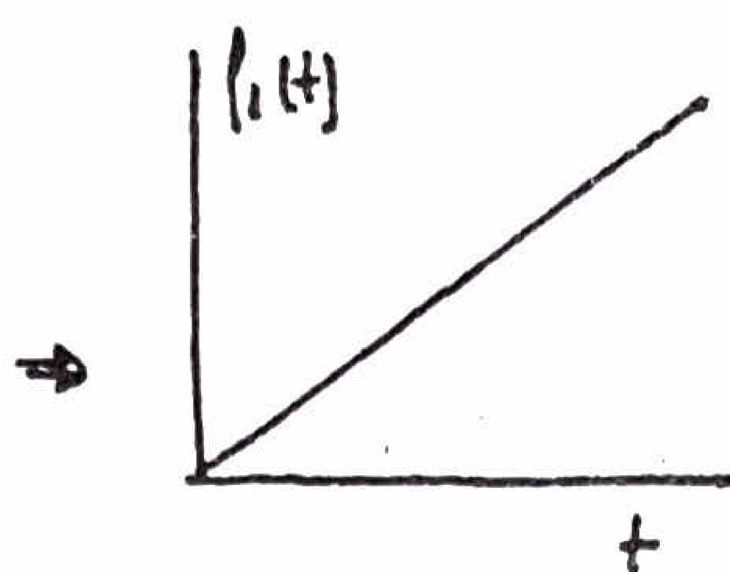
$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_m \omega}{s^2+\omega^2}\left[1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}\right]$

25-Sigue

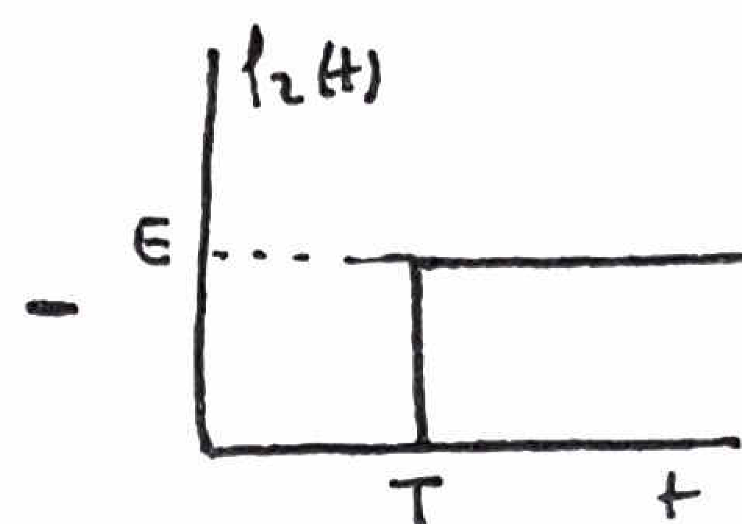
c)



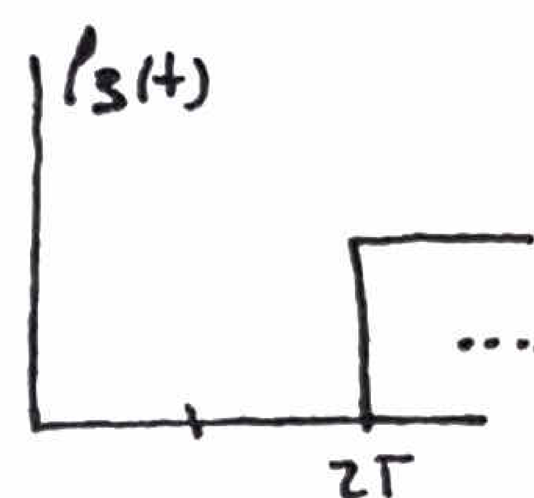
$\rightarrow$



$-$



$-$



Por tanto

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) - f_3(t) - \cdots - f_n(t) = \frac{E}{T}t - Eu_{-1}(t-T) - Eu_{-1}(t-2T) - \cdots$$

$$f(t) = \frac{E}{T}t - \sum_{n=1}^{\infty} E u_{-1}(t-nT)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{E}{T}t\right] - \mathcal{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty} E u_{-1}(t-nT)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{E}{T}t\right] - \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}\left[E u_{-1}(t-nT)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{E}{T}t\right] = \frac{E}{Ts^2}$$

$$\mathcal{L}\left[E u_{-1}(t-nT)\right] = \frac{E}{s} e^{-nsT}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E}{s} e^{-nTs} = \frac{E}{s} e^{-Ts}\left[1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots + e^{-(n-1)Ts}\right] = \frac{E}{s} e^{-Ts} \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{E}{Ts^2} - \frac{E}{s}\frac{e^{-Ts}}{1-e^{-Ts}} = \frac{E}{s}\left[\frac{1}{Ts} - \frac{e^{-Ts}}{1-e^{-Ts}}\right]$$

Hallar el desarrollo en fracciones parciales de:

a)
$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4}$$

$$A = \left[\frac{1}{s+4}\right]_{s=-1} = \frac{1}{3} \qquad B = \left[\frac{1}{s+1}\right]_{s=-4} = -\frac{1}{3}$$

Por tanto,

$$F(s) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{s+1} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{s+4}$$

---

b)
$$F(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5}$$

$$A = \left[\frac{1}{(s+2)(s+5)}\right]_{s=0} = \frac{1}{10}\ ; \quad B = \left[\frac{1}{s(s+5)}\right]_{s=-2} = -\frac{1}{6}\ ; \quad C = \left[\frac{1}{s(s+2)}\right]_{s=-5} = \frac{1}{15}$$

$$F(s) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{s+2} + \frac{1}{15}\,\frac{1}{s+5}$$

---

c)
$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+10}$$

$$A = \left[\frac{1}{s^2+2s+10}\right]_{s=0} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{Bs+C}{s^2+2s+10} = \frac{1}{s(s^2+2s+10)} - \frac{1}{10}\,\frac{1}{s} = \frac{-s^2-2s}{10s(s^2+2s+10)} = -\frac{s+2}{10(s^2+2s+10)}$$

por tanto,

$$F(s) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{10}\,\frac{s+2}{s^2+2s+10}$$

d)

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)(s+6)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+6}$$

$$A = \left[\frac{s+2}{(s+1)(s+6)}\right]_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$B = \left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{s+2}{(s+1)(s+6)}\right]\right\}_{s=0} = -\frac{2}{9}$$

$$C = \left[\frac{s+2}{s^2(s+6)}\right]_{s=-1} = \frac{1}{5} \quad , \quad D = \left[\frac{s+2}{s^2(s+1)}\right]_{s=-6} = \frac{1}{45}$$

$$F(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{45}\frac{1}{s+6}$$

---

e)

$$F(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+6s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+6s+10}$$

$$A = \left[\frac{1}{(s+2)(s^2+6s+10)}\right]_{s=0} = \frac{1}{20} \quad , \quad B = \left[\frac{1}{s(s^2+6s+10)}\right]_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{Cs+D}{s^2+6s+10} = \frac{1}{s(s+2)(s^2+6s+10)} - \frac{1}{20s} + \frac{1}{4(s+2)} = \frac{4s^3+22s^2+28s}{20s(s^2+6s+10)(s+2)} =$$

$$= \frac{\cancel{s}(\cancel{s+2})(4s+14)}{20\cancel{s}(\cancel{s+2})(s^2+6s+10)} = \frac{4}{20}\frac{s+14/4}{s^2+6s+10}$$

Por tanto:

$$F(s) = \frac{1}{20}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{4}{20}\frac{s+14/4}{s^2+6s+10}$$

27

Resolver por Laplace las siguientes ecuaciones diferenciales, suponiendo nulas las condiciones iniciales.

a) $D^2x + 9x = 1$

Aplicando transformadas, tenemos

$$p^2 X(p) + 9X(p) = \frac{1}{p}$$

$$X(p) = \frac{1/p}{p^2+9} = \frac{1}{p(p^2+9)}$$

$$x(t) = \frac{1}{9}(1-\cos 3t) \qquad \text{(Nº 21 de la tabla).}$$

b) $D^2x + 5Dx + 4x = 8$

$$p^2X(p) + 5pX(p) + 4X(p) = \frac{8}{p}$$

$$X(p) = \frac{8/p}{p^2+5p+4} = \frac{8}{p[(p+1)(p+4)]} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+4}$$

$$A = \left[\frac{8}{(p+1)(p+4)}\right]_{p=0} = 2 \quad ; \quad B = \left[\frac{8}{p(p+4)}\right]_{p=-1} = -\frac{8}{3}$$

$$C = \left[\frac{8}{p(p+1)}\right]_{p=-4} = \frac{2}{3}$$

$$X(p) = \frac{2}{p} - \frac{8}{3}\frac{1}{p+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{p+4} \quad \text{, por lo que}$$

$$x(t) = 2 - \frac{8}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t}$$

---

c) $D^2x + Dx + 4{,}25x = t+1$

$$p^2X(p) + pX(p) + 4{,}25X(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$X(p) = \frac{\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p}\right)}{p^2+p+4{,}25} = \frac{p+1}{p^2(p^2+p+4{,}25)} = \frac{p+1}{p^2\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+4\right]}$$

$$x(t) = \frac{1}{4{,}25}\left(t+1-\frac{1}{4{,}25}\right) + \frac{\sqrt{4{,}25}}{9{,}5}e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{sen}(2t+\theta)$$

$$\theta = 2\,tg^{-1}4 + tg^{-1}4 = \ tg^{-1}4$$

(Nº 39 de la tabla)

27-5

d) $D^3x + D^2x + 4Dx + 4x = 10 \operatorname{sen} 10t$

$$p^3X(p) + p^2X(p) + 4pX(p) + 4X(p) = \frac{100}{p^2+100}$$

$$X(p) = \frac{100}{(p^3+p^2+4p+4)(p^2+100)} = \frac{100}{(p+1)(p^2+4)(p^2+100)} =$$

$$= \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2j} + \frac{C}{p-2j} + \frac{D}{p+10j} + \frac{E}{p-10j}$$

$$A = \left[\frac{100}{(p^2+4)(p^2+100)}\right]_{p=0} = \frac{100}{505} \quad // \quad B = \left[\frac{100}{(p+1)(p-2j)(p^2+100)}\right]_{p=-2j} = -\frac{25}{96(2+j)}$$

$$D = \left[\frac{100}{(p+1)(p^2+4)(p-10j)}\right]_{p=-10j} = \frac{5}{96(10+j)}$$

Por tanto,

$$C = -\frac{25}{96(2-j)} \qquad E = \frac{5}{96(10-j)}$$ ya que son los complejos conjugados de B y D, respectivamente.

$$X(p) = \frac{100}{505}\frac{1}{p+1} - \frac{25}{480}\frac{2-j}{p+2j} - \frac{25}{480}\frac{2+j}{p-2j} + \frac{5}{9696}\frac{10-j}{p+10j} + \frac{5}{9696}\frac{10+j}{p-10j}$$

$$x(t) = \frac{100}{505}e^{-t} - \frac{25(2-j)}{480}e^{-2jt} - \frac{25(2+j)}{480}e^{2jt} + \frac{5(10-j)}{9696}e^{-10jt} + \frac{5(10+j)}{9696}e^{10jt} =$$

$$= \frac{100}{505}e^{-t} - \frac{100}{480}\cos 2t + \frac{50}{480}\operatorname{sen} 2t + \frac{100}{9696}\cos 10t - \frac{10}{9696}\operatorname{sen} 10t$$

28

Escribir las transformadas de Laplace de las ecuaciones siguientes:

a) $Dx + 7x = 0$ $\qquad [x(0)] = -1$

$$pX(p) + 1 + 7X(p) = 0$$

$$(p+7)X(p) = -1$$

b) $D^2x + 2Dx + 5x = 10$ $\qquad x(0) = 2 \quad [Dx]_0 = 0$

$$p^2X(p) - 2p + 2pX(p) - 4 + 5X(p) = \frac{10}{p}$$

$$(p^2 + 2p + 5)X(p) = \frac{10}{p} + 2p + 4 = \frac{2p^2 + 4p + 10}{p}$$

c) $D^2x + 3Dx + x = t$ $\qquad x(0) = 0 \quad (Dx)_0 = -2$

$$p^2X(p) + 2 + 3pX(p) + X(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$(p^2 + 3p + 1)X(p) = \frac{1}{p^2} - 2$$

d) $D^3x + 4D^2x + 8Dx + 4x = \operatorname{sen} 5t$ $\qquad x(0) = -4 \;\; (Dx)_0 = 1 \;\; (D^2x)_0 = 0$

$$p^3X(p) + 4p^2 - p + 4p^2X(p) + 16p - 4 +$$
$$+ 8pX(p) + 32 + 4X(p) = \frac{5}{p^2+25}$$

$$(p^3 + 4p^2 + 8p + 4)X(p) = \frac{5}{p^2+25} - 4p^2 + p - 16p - 28 = \frac{5}{p^2+25} - 4p^2 - 15p - 28$$

29

Hallar el valor final de las siguientes expresiones:

a) $$F(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}$$

Valor final $= \lim_{t\to\infty} [f(t)] = \lim_{s\to 0} [s\,F(s)]$

$$\lim_{s\to 0} \frac{10s}{(s+1)^2(s^2+2s+2)} = 0$$

b) $$F(s) = \frac{13}{s(s^2+4s+13)}$$

$$\lim_{s\to 0} \left[\frac{13}{s^2+4s+13}\right] = 1$$

c) $$F(s) = \frac{K}{s[s(s+2)(s^2+s+10)+K]}$$

$$\lim_{s\to 0} \left[\frac{K}{s(s+2)(s^2+s+10)+K}\right] = 1$$

d) $$F(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+6s+10)}$$

$$\lim_{s\to 0} \left[\frac{1}{(s+2)(s^2+6s+10)}\right] = \frac{1}{20}$$

30

Determinar el valor inicial de las expresiones siguientes:

a) $$F(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}$$

Valor inicial $= \lim_{t \to 0} [f(t)] = \lim_{s \to \infty} [s\,F(s)]$

$$\lim_{s \to \infty} \left[\frac{10s}{(s+1)^2(s^2+2s+2)} \right] = 0$$

b) $$F(s) = \frac{13}{s(s^2+4s+13)}$$

$$\lim_{s \to \infty} \left[\frac{13s}{s(s^2+4s+13)} \right] = 0$$

c) $$F(s) = \frac{K}{s[s(s+2)(s^2+s+10)+K]}$$

$$\lim_{s \to \infty} \left[\frac{K}{(s+2)(s^2+s+10)+K} \right] = 0$$

d) $$F(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+6s+10)}$$

$$\lim_{s \to \infty} \left[\frac{1}{(s+2)(s^2+6s+10)} \right] = 0$$

31.

Encontrar la solución completa de $x(t)$ en las ecuaciones siguientes, suponiendo condiciones iniciales nulas.

a) $$(D^2+D+2)(D+4)x = (D+2)\,\delta(t)$$

$$(s^2+s+2)(s+4)\,X(s) = s+2 \qquad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$X(s) = \frac{s+2}{(s+4)(s^2+s+2)} = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs+C}{s^2+s+2}$$

$$A = \left[\frac{s+2}{s^2+s+2}\right]_{s=-4} = -\frac{1}{7}$$

$$\frac{Bs+C}{s^2+s+2} = \frac{s+2}{(s+4)(s^2+s+2)} + \frac{1}{7}\,\frac{1}{s+4} = \frac{s+4}{7(s^2+s+2)}$$

$$X(s) = -\frac{1}{7}\,\frac{1}{s+4} + \frac{1}{7}\,\frac{s+4}{s^2+s+2} = -\frac{1}{7}\,\frac{1}{s+4} + \frac{1}{7}\,\frac{s+4}{\left[(s+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\right]}$$

$$x(t) = -\frac{1}{7}e^{-4t} + \sqrt{8}\,e^{-\frac{1}{2}t}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t+\theta\right) \qquad \theta = \text{tg}^{-1}\,\frac{\sqrt{7}}{7}$$

b) $$(D^2+D+2)(D+4)x = (D+2)\,10\,u(t)$$

$$(s^2+s+2)(s+4)\,X(s) = (s+2)\,\frac{10}{s} = 10 + \frac{20}{s} = \frac{10s+20}{s}$$

$$X(s) = \frac{10s+20}{s(s^2+s+2)(s+4)} = 10\,\frac{s+2}{s(s+4)\left[(s+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\right]}$$

$$x(t) = \frac{10\times 2}{4\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\right)} - \frac{(4-2)e^{-4t}}{4\left[(4-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\right]} + \frac{\sqrt{(2-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}}{\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}\sqrt{(4-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}}\,e^{-\frac{1}{2}t}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t+\theta\right)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\frac{\sqrt{7}/2}{2-\frac{1}{2}} - \text{tg}^{-1}\frac{\sqrt{7}/2}{-\frac{1}{2}} - \text{tg}^{-1}\frac{\sqrt{7}/2}{4-\frac{1}{2}}$$

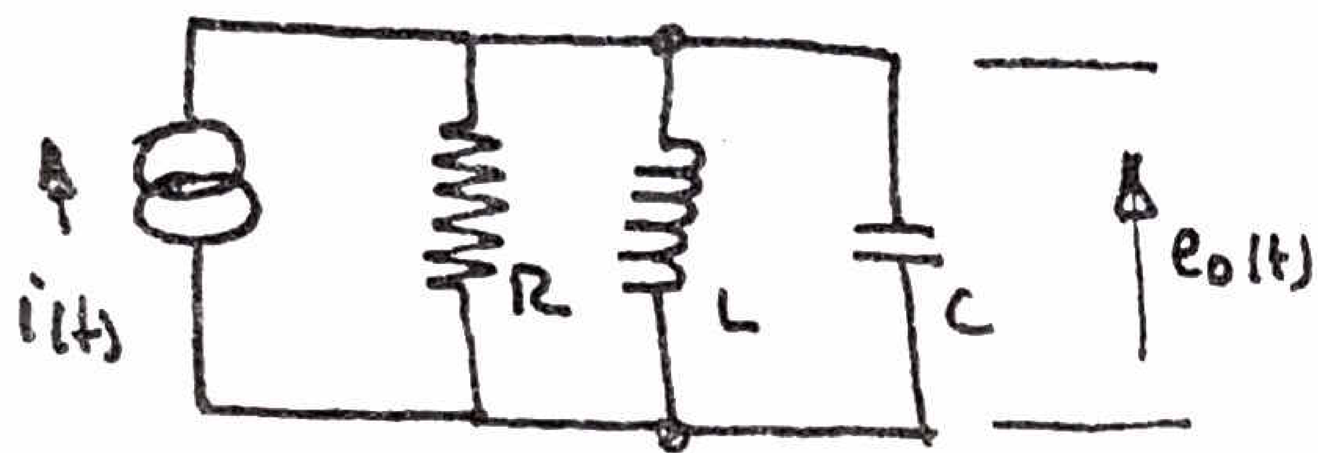
$$x(t) = 2{,}5 - \frac{2}{56}e^{-4t} + \frac{8}{\sqrt{784}}\,e^{-\frac{1}{2}t}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t+\theta\right)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}(\sqrt{7}) - \text{tg}^{-1}(-\sqrt{7}) - \text{tg}^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}$$

(N° 31 de la tabla)

32

En el circuito de la figura, calcular $e_o(t)$ siendo $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$. Calcular R para que el amortiguamiento sea crítico. El sistema está inicialmente en reposo. Utilizar el método de resolución de Laplace.



$L = 200\ \mu H$
$C = 12{,}5\ pF$
$I_0 = 7{,}5\ mA$
$\tau = 6 \times 10^{-8}$ sg.

Transformada de la ecuación del nudo:

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Lp} + Cp\right) e_o(p) = I(p)$$

$$\left(LCp^2 + \frac{L}{R}p + 1\right) e_o(p) = Lp\, I(p) = \frac{Lp\, I_0}{p + \frac{1}{\tau}}$$

$$e_o(p) = \frac{Lp\, I_0}{\left(p+\frac{1}{\tau}\right)\left(LCp^2 + \frac{L}{R}p + 1\right)} = \frac{Lp\, I_0}{\left(p+\frac{1}{\tau}\right)\left[LC\left(p^2 + \frac{1}{CR}p + \frac{1}{LC}\right)\right]}$$

Amortiguamiento crítico $\Rightarrow$

$$p^2 + \frac{1}{CR}p + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 = 0$$

$\zeta = 1 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad 2\zeta\omega_n = 2\omega_n = \frac{1}{CR} \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{2C\omega_n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = 2000\,\Omega$

$$e_o(p) = \frac{Lp\, I_0}{\left(p+\frac{1}{\tau}\right)\left[LC\left(p^2 + \frac{1}{CR}p + 1/LC\right)\right]} = \frac{Lp\, I_0}{\left(p+\frac{1}{\tau}\right)\left[LC(p+a)^2\right]} =$$, ya que $\zeta = 1$

$$= \frac{p\, I_0}{C\left(p+\frac{1}{\tau}\right)(p+a)^2} = \frac{A}{p+\frac{1}{\tau}} + \frac{B}{(p+a)^2} + \frac{C}{p+a}$$

$\frac{1}{\tau} = \frac{10^8}{6} \qquad a = \zeta\omega_n = \frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{10^8}{5}$

$$A = \left[\frac{p\, I_0}{C(p+a)^2}\right]_{p=-\frac{1}{\tau}} = -900$$

$$B = \left[\frac{p\, I_0}{C\left(p+\frac{1}{\tau}\right)}\right]_{p=-a} = \frac{900}{2{,}5 \times 10^{-7}}$$

$$C = \frac{d}{dp}\left[\frac{p\,I_o}{c\left(p+\frac{1}{\delta}\right)}\right]_{p=-a} = 900$$

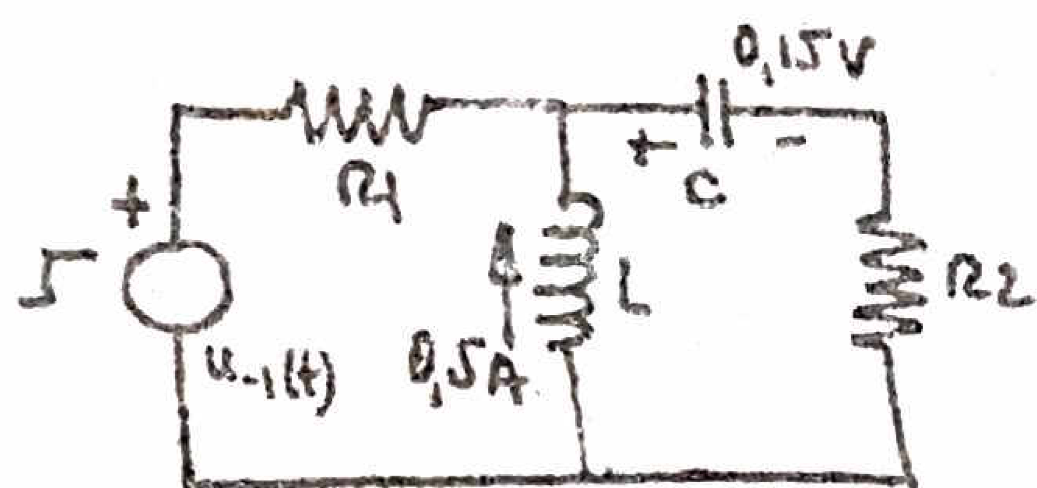
Por tanto.

$$e_o(p) = -\frac{900}{\left(p+\frac{10^8}{6}\right)} + \frac{900\times 10^7}{2{,}5\left(p+\frac{10^8}{5}\right)^2} + \frac{900}{p+\frac{10^8}{5}}$$

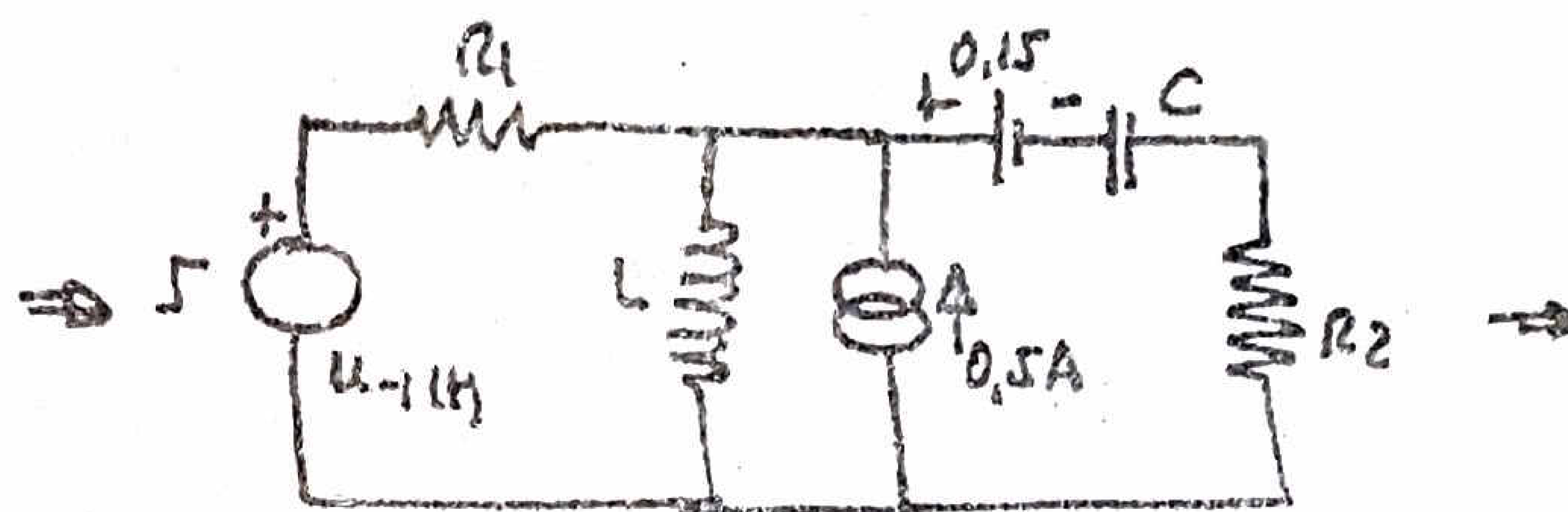
$$e_o(t) = -900\,e^{-\frac{10^8}{6}t} + 900\,e^{-\frac{10^8}{5}t} + \frac{900\times 10^7}{2{,}5}\,t\,e^{-\frac{10^8}{5}t}$$



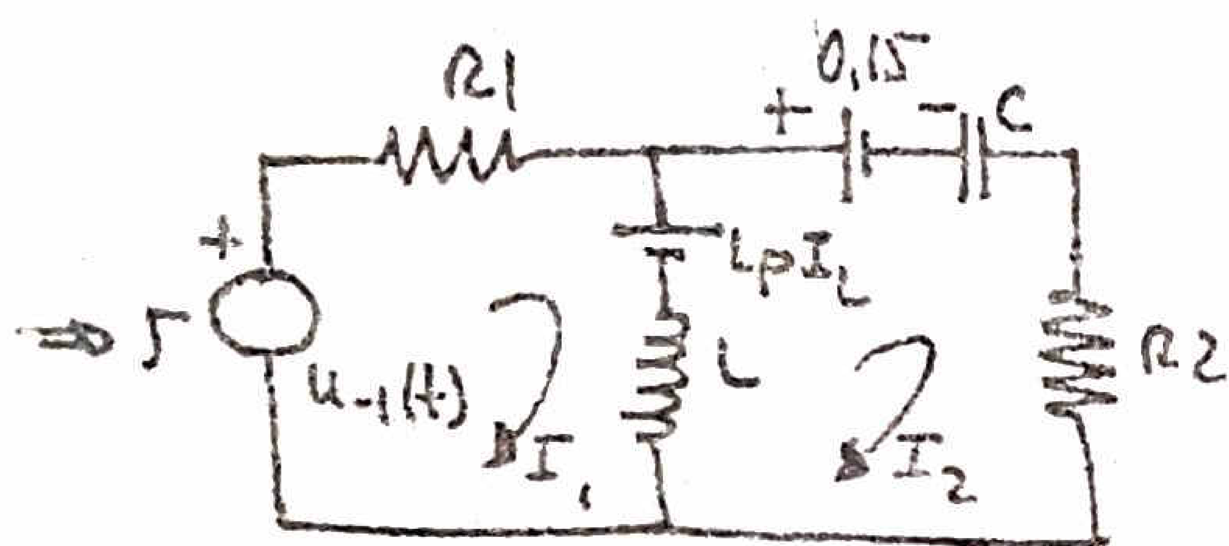
33. Modificar el circuito de la figura a fin de que aparezca con las condiciones iniciales nulas. Calcular la tensión $e_0(t)$ por el método de Laplace. Comprobar las condiciones en los límites.



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



$R_1 = R_2 = 1\,\Omega$

$L = 2H$

$C = 2F$

Ecuaciones por Laplace.

$$\begin{cases}(R_1+Lp)\,I_1(p) - Lp\,I_2(p) = \frac{1}{p} - LI_L \\ -Lp\,I(p) + \left(Lp+R_2+\frac{1}{Cp}\right)I_2(p) = LI_L - \frac{0{,}15}{p}\end{cases}$$

$$I_2(p) = \frac{(R_1+Lp)\left(LI_L - \frac{0{,}15}{p}\right) + Lp\left(\frac{1}{p} - LI_L\right)}{\left(R_1LCp^2 + R_1 + R_1R_2Cp + Lp + R_2LCp^2\right)\frac{1}{Cp}}$$

, sustituyendo valores, tenemos

$$I_2(p) = \frac{5{,}4\,p - 0{,}3}{8p^2+4p+1} = \frac{5{,}4}{8}\,\frac{p - \frac{0{,}3}{5{,}4}}{p^2+\frac{1}{2}p+\frac{1}{8}} = \frac{5{,}4}{8}\,\frac{p-\frac{3}{54}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}}$$

$$I_2(t) = \frac{5{,}4}{8}\,\frac{\sqrt{\left(\frac{3}{54}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}}}{\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{1}{4}t}\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}t+\theta\right) = 1{,}066\,e^{-0{,}25t}\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}t+\theta\right)$$

$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{1/4}{-\frac{3}{54}-\frac{1}{4}} =$$

(Nº 26 de la tabla).

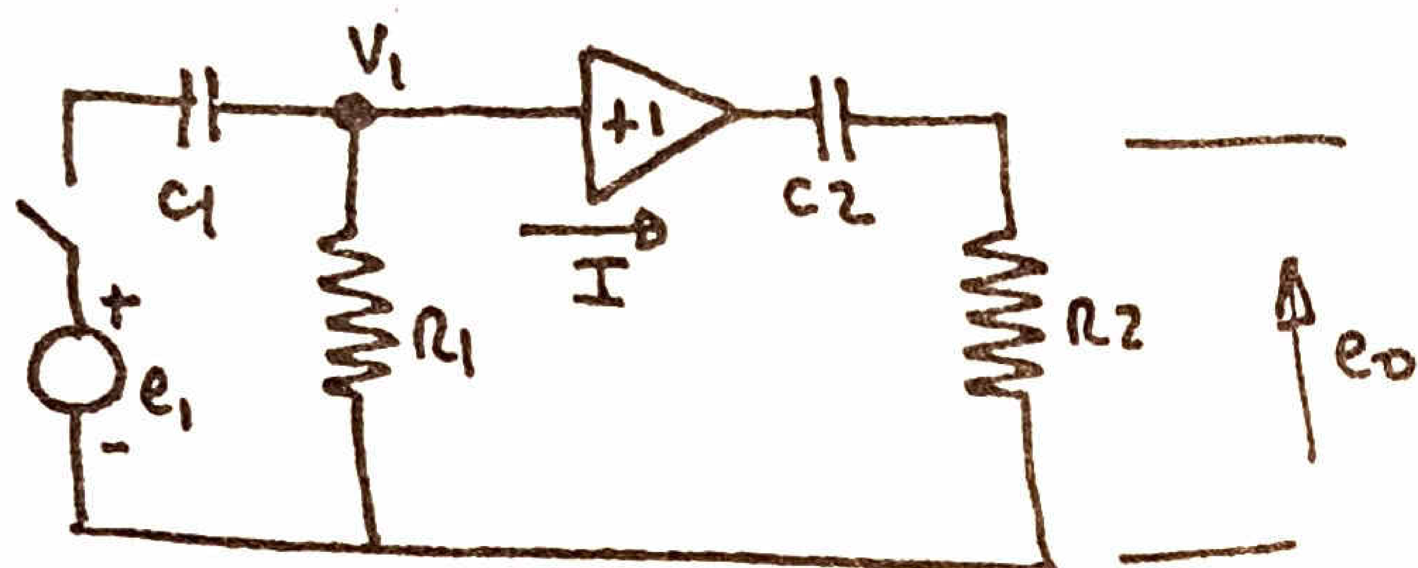
Valor inicial:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty}\left[p\,F(p)\right] = \frac{5{,}4}{8} = \underline{0{,}675\ A}$$

En la figura el triángulo representa un paso de separación cuya misión es evitar el efecto de carga de la segunda célula sobre la primera (p. ej. un seguidor de emisor). $e_1(t)$ es un impulso de tensión de subida instantánea y caída exponencial con la constante de tiempo $1/\alpha$. C_1 y C_2 están inicialmente descargados. Calcular la tensión $e_o(t)$ de salida, sabiendo que:

$$R_1C_1 = R_2C_2 = 2\,\mu seg$$

$$\alpha = 2\times10^5\ sg^{-1}$$



Las ecuaciones de nudos son, teniendo en cuenta que $I=0$

$$0 = -C_1 p E_1 + \left(C_1 p + \frac{1}{R_1}\right)V_1$$

$$0 = -C_2 p V_1 + \left(C_2 p + \frac{1}{R_2}\right)E_o$$

E, V, E_o, transformadas de Laplace de las tensiones.

$$V_1 = \frac{C_1 p E_1}{C_1 p + \frac{1}{R_1}} = \frac{R_1C_1 p E_1}{R_1C_1 p + 1}$$

$$E_o = \frac{R_1C_1R_2C_2 p^2 E_1}{\left(p+\frac{1}{R_1C_1}\right)\left(p+\frac{1}{R_2C_2}\right)R_1C_1R_2C_2} = \frac{p^2 E_1}{\left(p+\frac{1}{R_1C_1}\right)\left(p+\frac{1}{R_2C_2}\right)}$$

$E_1(p) = \frac{1}{p+\alpha}$ ya que $e_1 = e^{-\alpha t}$

$$E_o = \frac{p^2}{(p+\alpha)\left(p+\frac{1}{R_1C_1}\right)^2}$$

ya que $\frac{1}{R_1C_1} = \frac{1}{R_2C_2}$

$$E_o = \frac{p^2}{(p+\alpha)\left(p+\frac{1}{R_1C_1}\right)^2} = \frac{A}{p+\alpha} + \frac{B}{\left(p+\frac{1}{R_1C_1}\right)^2} + \frac{C}{\left(p+\frac{1}{R_1C_1}\right)} = \frac{4/9}{p+2\times10^5} + \frac{5/9}{p+5\times10^5} - \frac{\frac{25}{3}\times10^5}{(p+5\times10^5)^2}$$

por tanto,

$$e_o(t) = \frac{4}{9}e^{-2\times10^5 t} - \frac{25}{3}\times10^5\, t\, e^{-5\times10^5 t} + \frac{5}{9}e^{-5\times10^5 t}$$

35

Determinar en cada uno de los casos siguientes el margen de valores de K para que la respuesta x(t) sea estable, siendo la función de fuerzas en forma escalón. Determinar las raíces que están sobre el eje imaginario productoras de oscilaciones sostenidas.

a)

$$X(s) = \frac{K}{s[s(s+2)(s^2+s+10)+K]} = \frac{K}{s\,P(s)}$$

Aplicando el método de Routh, tenemos

$$P(s) = s(s+2)(s^2+s+10)+K = s^4+3s^3+12s^2+20s+K$$

s^4	1	12	K
s^3	3	20	
s^2	$16/3$	K	
s^1	$\frac{320-9K}{16}$		
s^0	K		

Estabilidad para: $\begin{cases} K>0 \\ \frac{320-9K}{16}>0 \end{cases} \Rightarrow 0<K<35{,}5$

Para $K=35{,}5$ aparece una raíz compleja dada por,

$$\frac{16}{3}s^2+35{,}5=0 \qquad s^2+\frac{106{,}5}{16}=0 \Rightarrow s=\pm j\sqrt{\frac{106{,}5}{16}}$$

---

b)

$$X(s) = \frac{K}{s[s(0{,}02s+1)(0{,}01s+1)+K]} = \frac{K}{s\,P(s)}$$

$$P(s) = s(0{,}02s+1)(0{,}01s+1)+K = 2\times10^{-4}s^3+3\times10^{-2}s^2+s+K$$

s^3	2×10^{-4}	1
s^2	3×10^{-2}	K
s^1	$\frac{3\times10^{-2}-2\times10^{-4}K}{3\times10^{-2}}$	
s^0	K	

Estabilidad para: $\begin{cases} K>0 \\ 3\times10^{-2}-2\times10^{-4}K>0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 0<K<150$$

Para $K=150$, tenemos raíz compleja dada por:

$$3\times10^{-2}s^2+150=0$$

$$s=\pm j\sqrt{5000}$$

c)

$$X(s) = \frac{K(s+5)}{s[(s+5)(s^2+8s+20)+K(s+5)]} = \frac{K}{s[s^2+8s+20+K]} = \frac{K}{s\,P(s)}$$

$$P(s) = s^2+8s+20+K$$

s^2	1	$20+K$
s^1	8	
s^0	$20+K$	

Estable para : $20+K>0 \Rightarrow K>-20$

No hay raíces complejas.

d)

$$X(s) = \frac{K}{s[(s+1)(s+2)(s+5)+K]} = \frac{K}{s[s^3+8s^2+17s+10+K]} = \frac{K}{s\,P(s)}$$

$$P(s) = s^3+8s^2+17s+10+K$$

s^3	1	17
s^2	8	$10+K$
s^1	$\frac{126-K}{8}$	
s^0	$10+K$	

Estabilidad :

$$\begin{cases} 10+K>0 \\ \frac{126-K}{8}>0 \end{cases} \Rightarrow -10<K<126$$

Para $K=126$ hay raíz compleja dada por:

$8s^2+136=0$ $\quad$ $s=\pm j\sqrt{17}$

e)

$$X(s) = \frac{K}{s[s^3+6s^2+11s+6+K]} = \frac{K}{s\,P(s)}$$

s^3	1	11
s^2	6	$6+K$
s^1	$\frac{60-K}{6}$	
s^0	$6+K$	

Estabilidad :

$$\begin{cases} 6+K>0 \\ 60-K>0 \end{cases} \Rightarrow -6<K<60$$

Para $K=60$, raíz compleja dada por:

$6s^2+66=0$ $\quad$ $s=\pm j\sqrt{11}$

(36) Usar el criterio de Routh para determinar el número de raíces en el semiplano s positivo de las siguientes ecuaciones

a) $s^3 + 13s^2 + 33s + 30 = 0$

s^3	1	33
s^2	13	30
s^1	$\frac{399}{13}$	
s^0	30	

Solución: ninguna

b) $s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$

s^3	1	6
s^2	4	4
s^1	5	
s^0	4	

Solución: ninguna

c) $s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 6 = 0$

s^4	1	2	6
s^3	2	3	
s^2	1/2	6	
s^1	-21		
s^0	6		

Solución: dos

d) $s^4 + s^3 + 2s^2 + 9s + 5 = 0$

s^4	1	2	5
s^3	1	9	
s^2	-7	5	
s^1	67/8		
s^0	5		

Solución: dos

e) $s^4 + 7s^3 + 12,2s^2 + 11,05s = 0 \Longrightarrow s(s^3 + 7s^2 + 12,2s + 11,05) = 0$

s^3	1	12,2
s^2	7	11,05
s^1	$\frac{74,35}{7}$	
s^0	11,05	

Solución: ninguna.

Existe una raíz para $s = 0$

(37) La ecuación que da en un sistema su salida y(t) es:

$$[s^5 + s^4 + 2s^3 + s^2 + (K+1)s + (K+2)]\,Y(s) = 5X(s)$$

Determinar el margen de valores de K para que el sistema sea estable.

$$Y(s) = \frac{5\,X(s)}{s^5+s^4+2s^3+s^2+(K+1)s+K+2}$$

$$P(s) = s^5+s^4+2s^3+s^2+(K+1)s+K+2$$

s^5	1	2	K+1
s^4	1	1	K+2
s^3	1	-1	
s^2	2	K+2	
s^1	$\frac{-K-4}{2}$		
s^0	K+2		

Estabilidad para :
$$\begin{cases} K+2 > 0 & (1) \\ -\dfrac{K+4}{2} > 0 & (2) \end{cases}$$

De 1 obtenemos

$$-2 < K$$

De 2 obtenemos

$$K < -4$$

Estas dos relaciones son mutuamente excluyentes por lo que el sistema es incondicionalmente inestable.

(38)

La salida de un sistema de control está ligada a la entrada r(t) por:

$$\left[s^4 + 2s^3 + 2s^2 + (3+K)s + K\right] C(s) = K(s+1)\, R(s)$$

K representa la ganancia positiva de un amplificador. Se pide

a) Con $K = 6$ y entrada en escalón ¿será la salida estable?

b) Determinar el valor límite positivo de K para que la salida sea estable.

$$\left[s^4 + 2s^3 + 2s^2 + (3+K)s + K\right] C(s) = K(s+1)\, R(s)$$

$$C(s) = \frac{K(s+1)\, R(s)}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + (3+K)s + K} \qquad R(s) = \frac{1}{s} \text{ (escalon)}$$

$$C(s) = \frac{K(s+1)}{s\left[s^4 + 2s^3 + 2s^2 + (3+K)s + K\right]} = \frac{K(s+1)}{s\,P(s)}$$

$$P(s) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 + (3+K)s + K$$

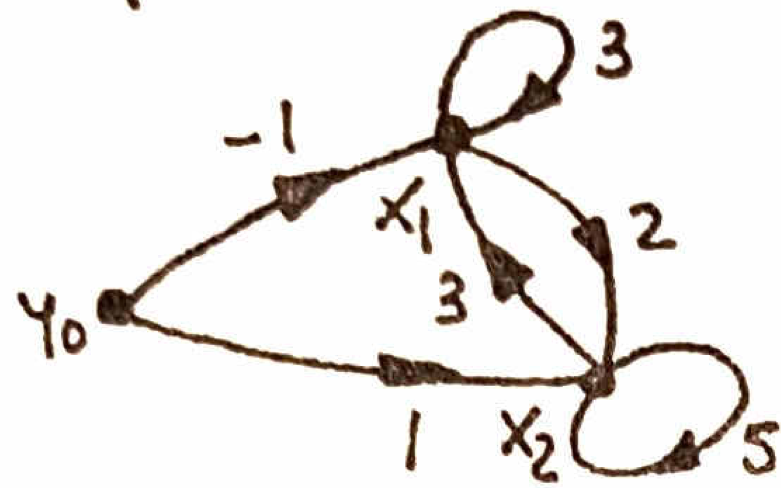
s^4	1	3	K
s^3	2	$3+K$	
s^2	$\frac{3-K}{2}$	K	
s^1	$\frac{9-K^2-4K}{3-K}$		
s^0	K		

Estable para $0 < K < 1{,}645$

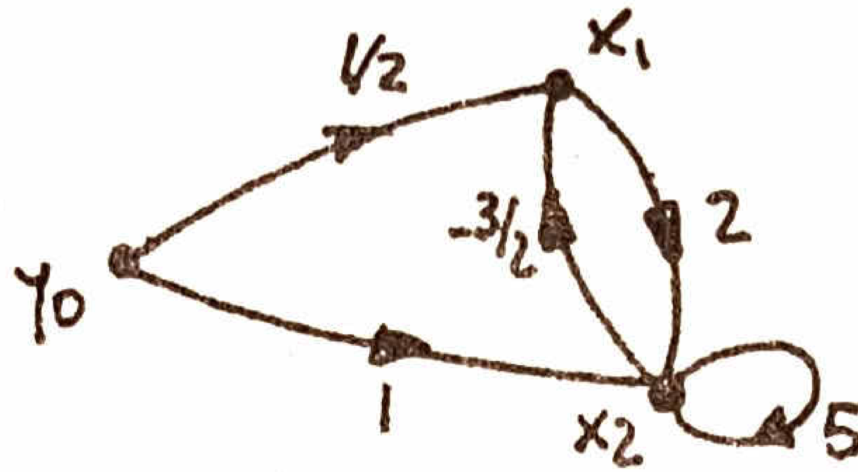
Para $K = 6 > 1{,}645$, es inestable.

3 → 140 → 15-40

(39) Utilizando la técnica de distensión de nudos, obtener en función de y_0 en el diagrama de flujo de la figura.



⇒



(eliminando el lazo propio de x_1)

⇒



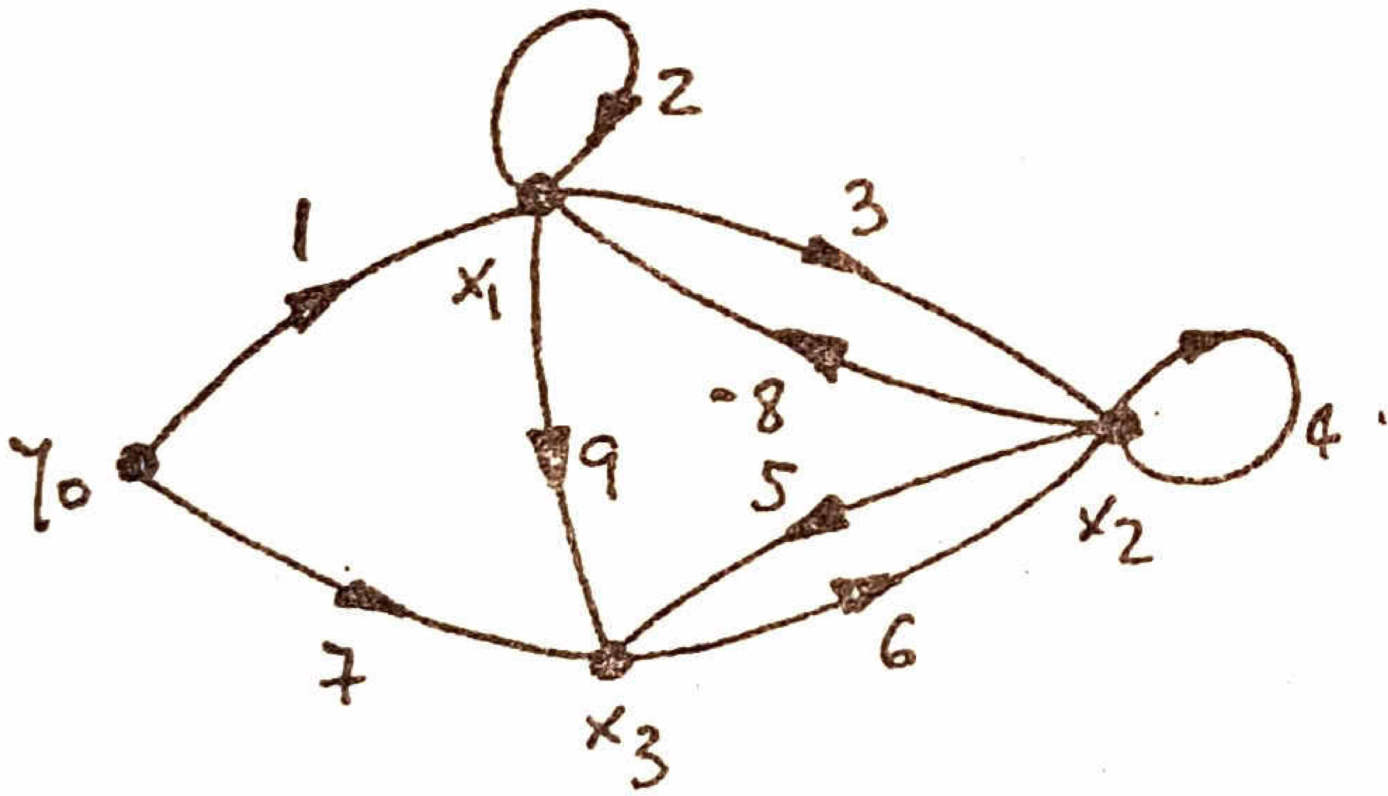
⇒



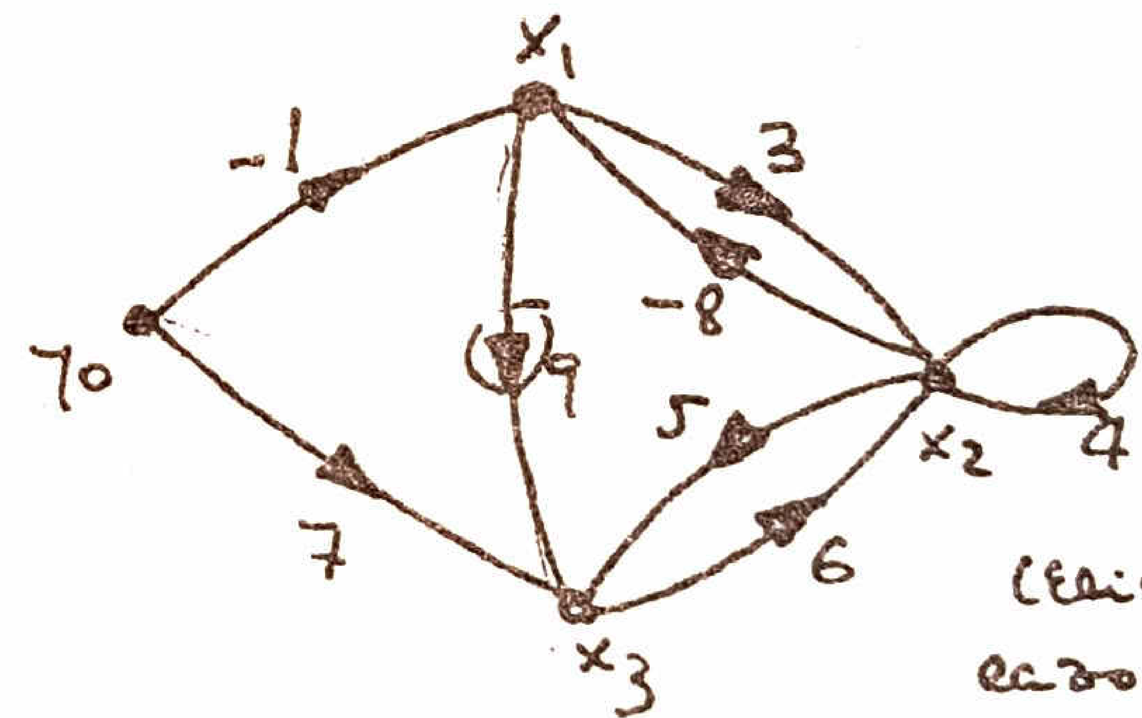
⇒ $x_2 = -2y_0$

Se han obtenido estos dos últimos pasos eliminando el nudo x_1 y el lazo propio de x_2, sucesivamente.

(40) Utilizando la técnica de distensión de nudos, obtener x_2 en función de y_0 en el gráfico de flujos de la figura.



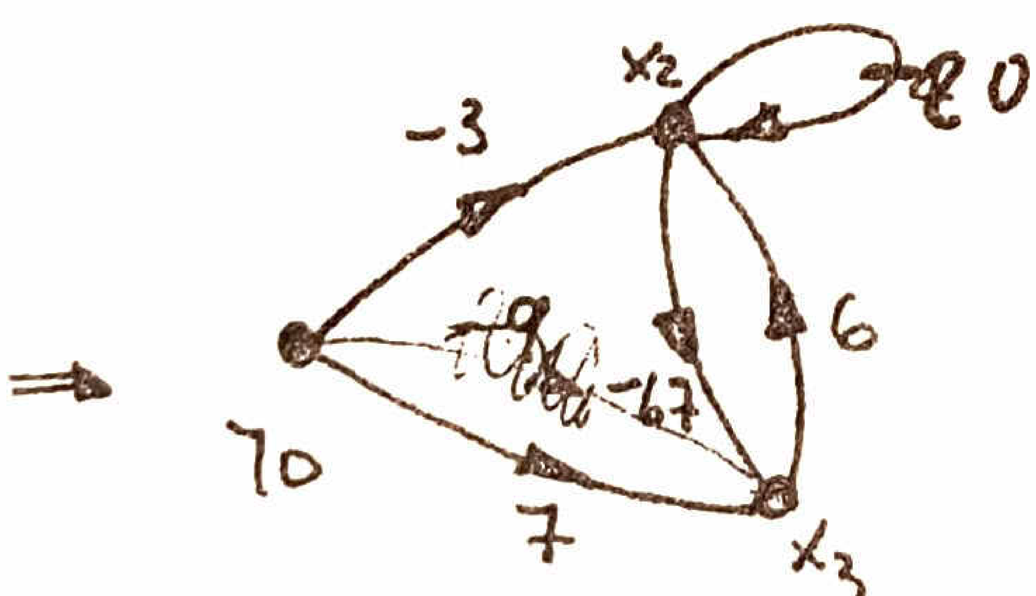
⇒



⇒

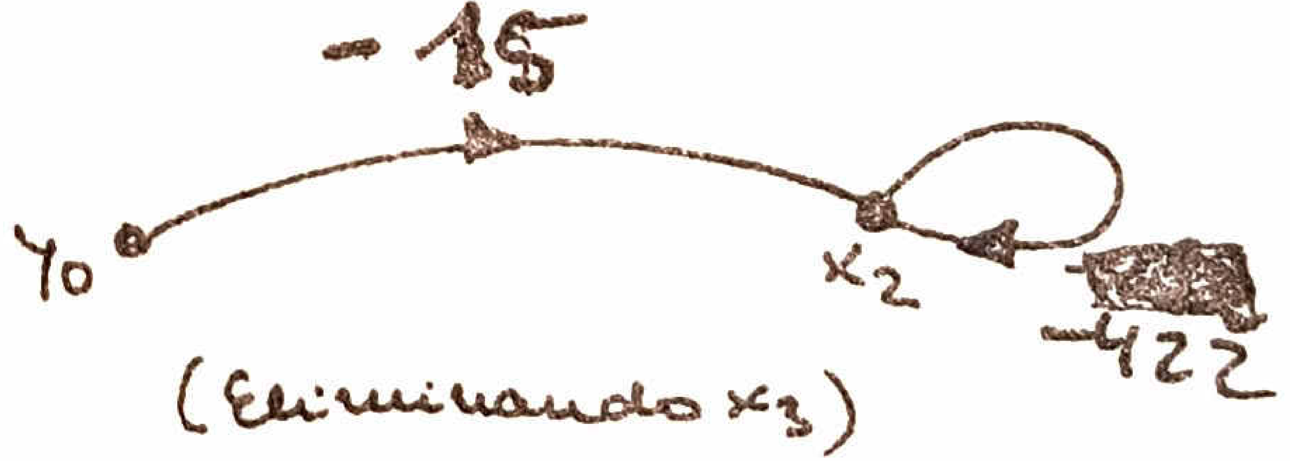
(Eliminando lazo propio x_1)

⇒



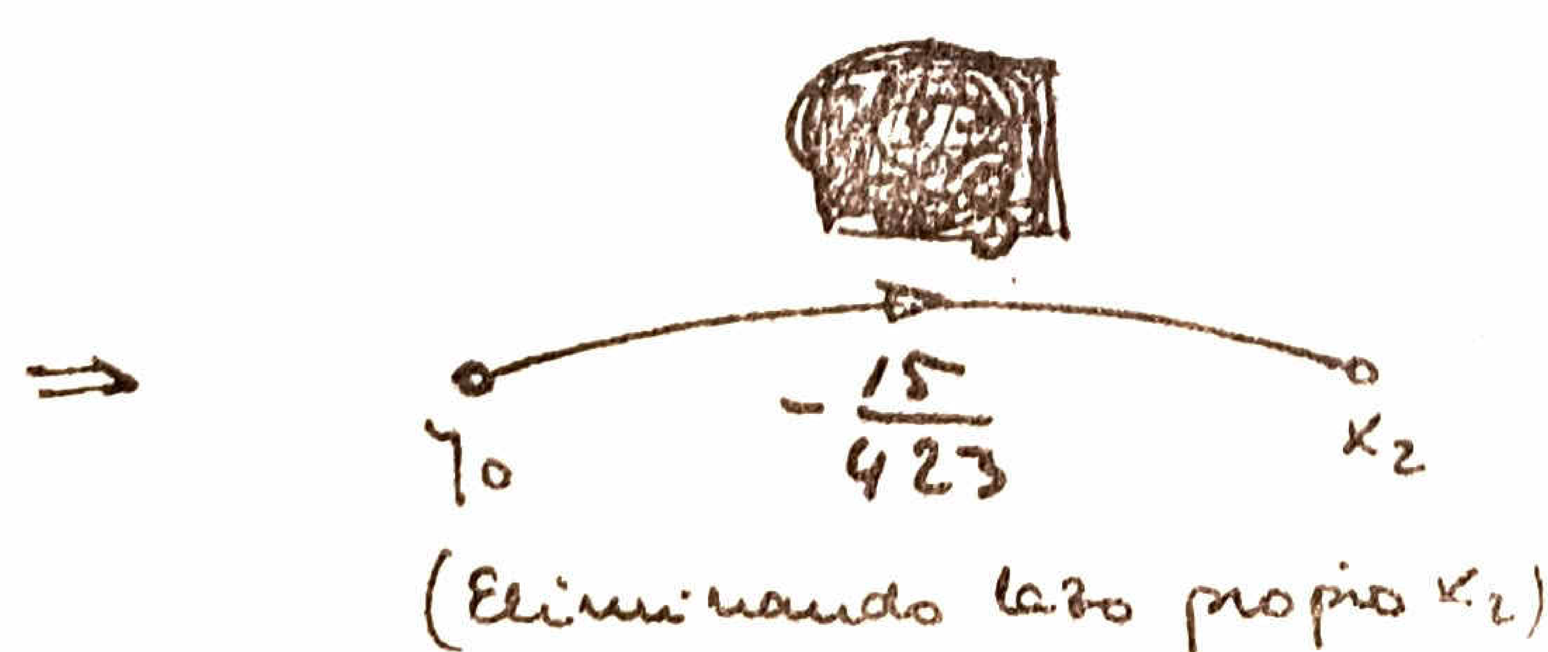
(Eliminando x_1)

⇒



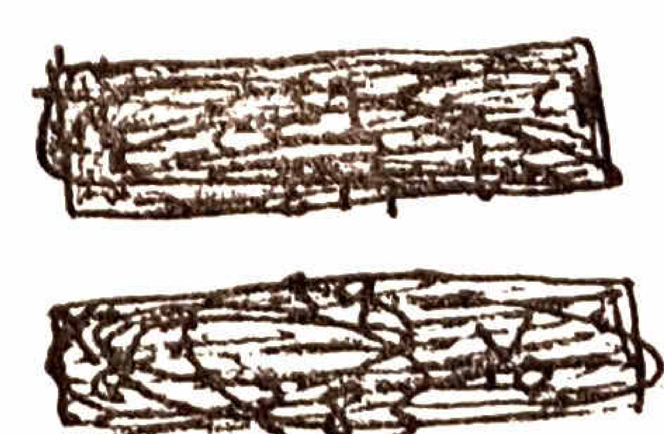
(Eliminando x_3)

⇒



(Eliminando lazo propio x_2)

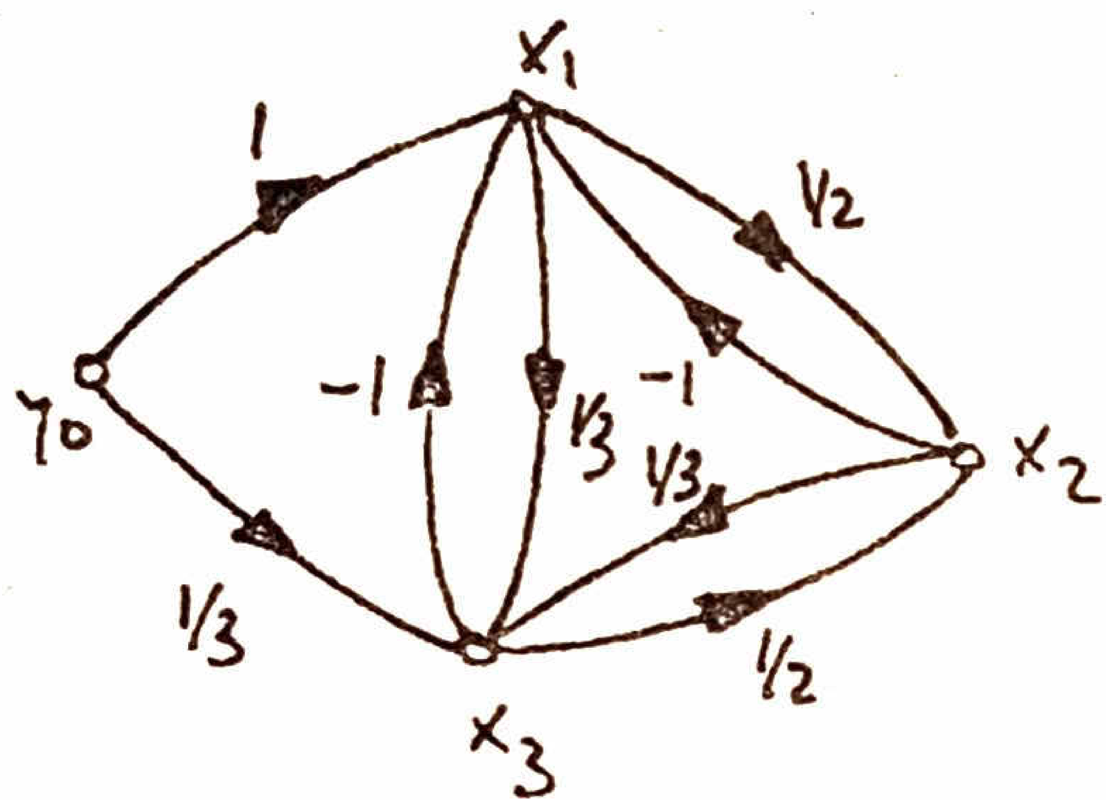
⇒



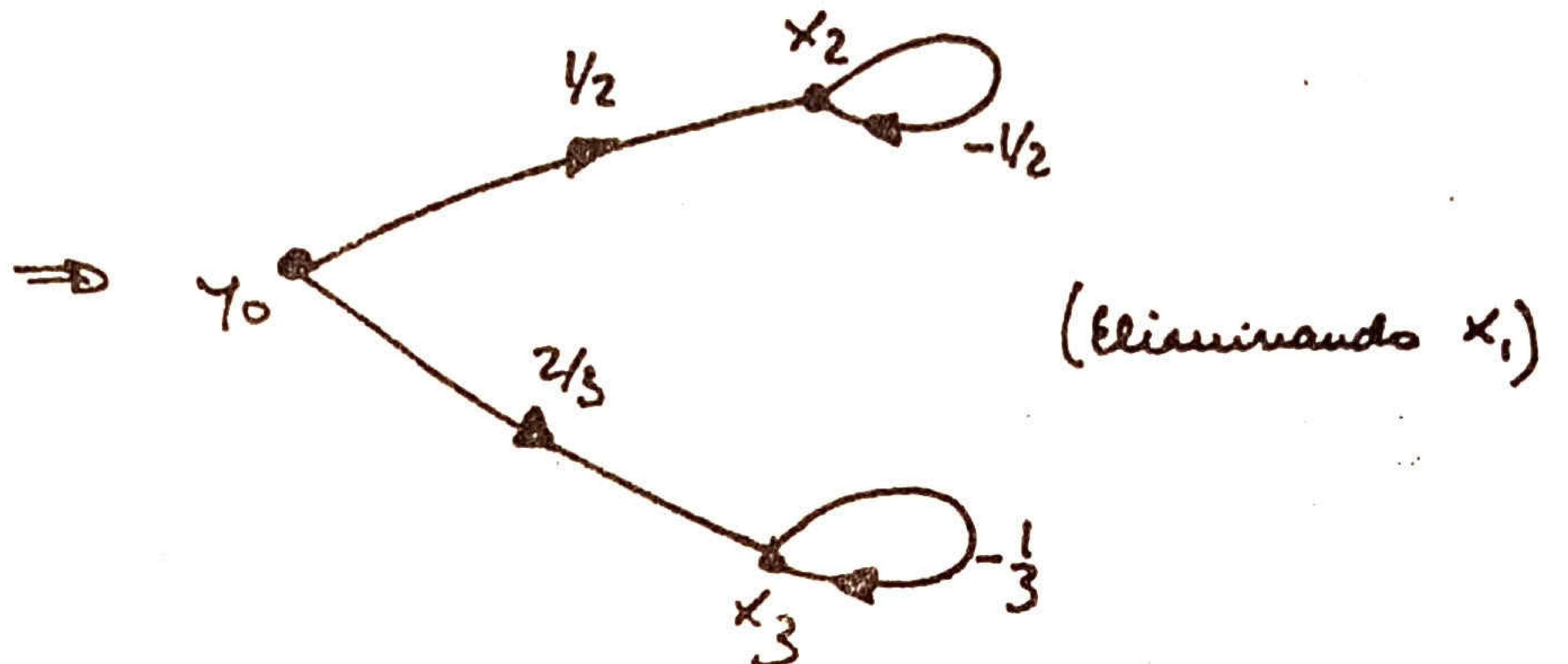
$x_2 = -\frac{15}{423} y_0$

(41) Utilizando la técnica de distensión de nudos obtener x_2 en función de y_0 del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} y_0 = x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -y_0 = x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_0 - x_2 - x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = \frac{1}{3}y_0 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \end{cases}$$

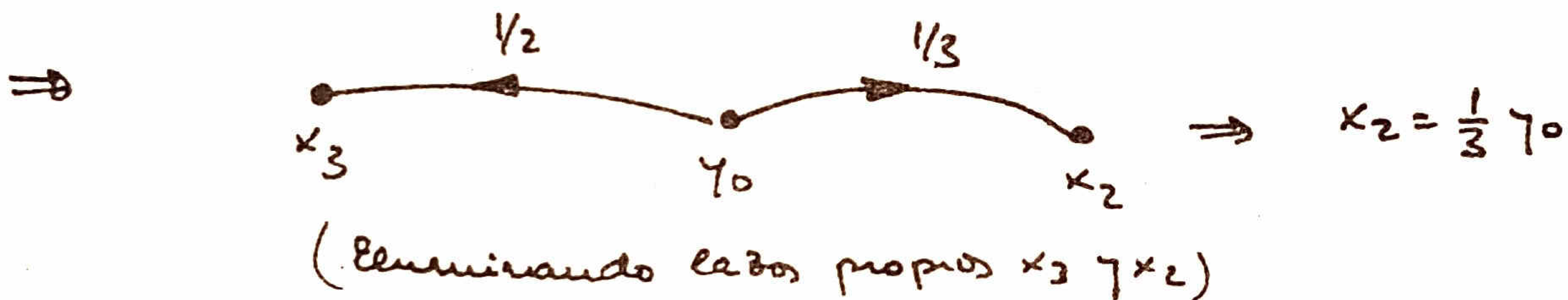


$\Rightarrow$



(Eliminando x_1)

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $x_2 = \frac{1}{3} y_0$

(Eliminando lazos propios x_3 y x_2)

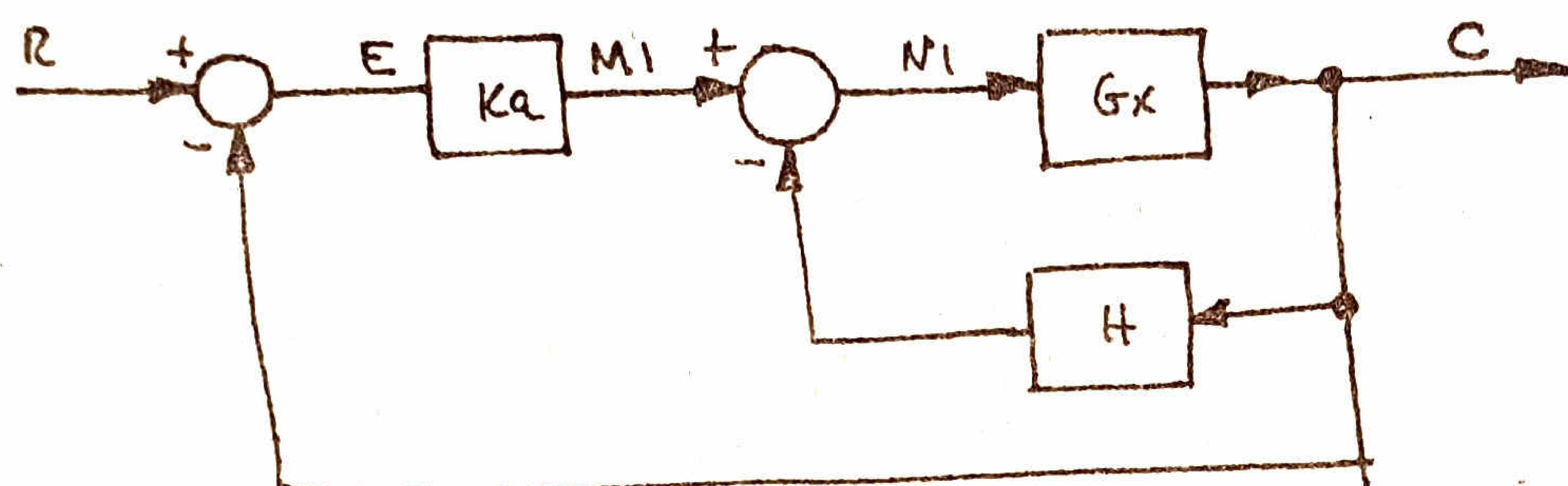
(42)

Dado el diagrama de bloques de la figura, se pide:

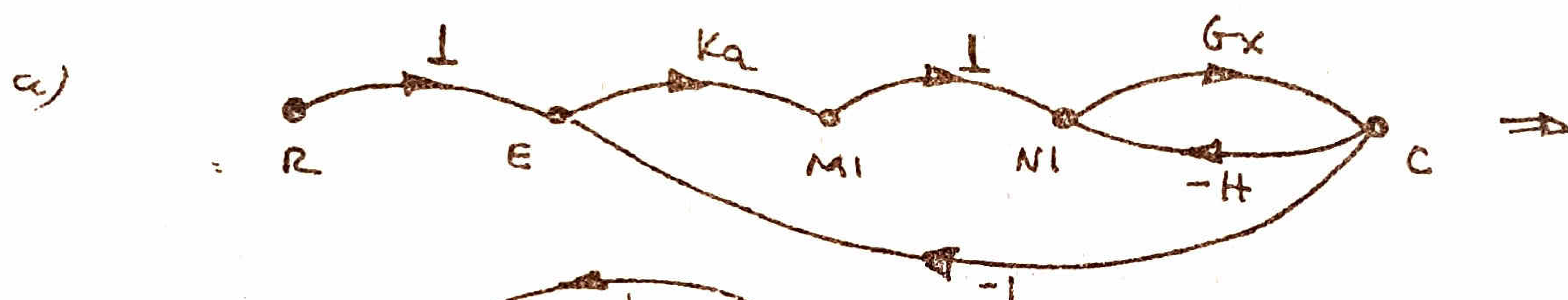
a) Su diagrama de flujos

b) Utilizando la técnica de disminución de nudos, hallar la relación C/R.

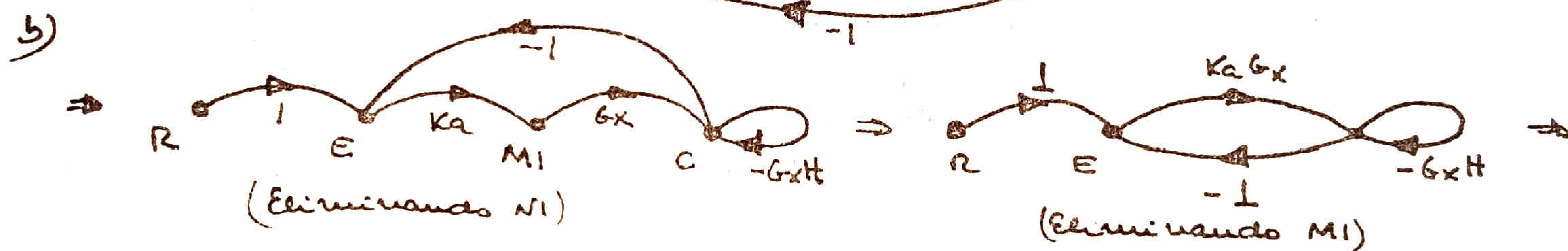
c) Hallar C/R usando la regla de Mason.

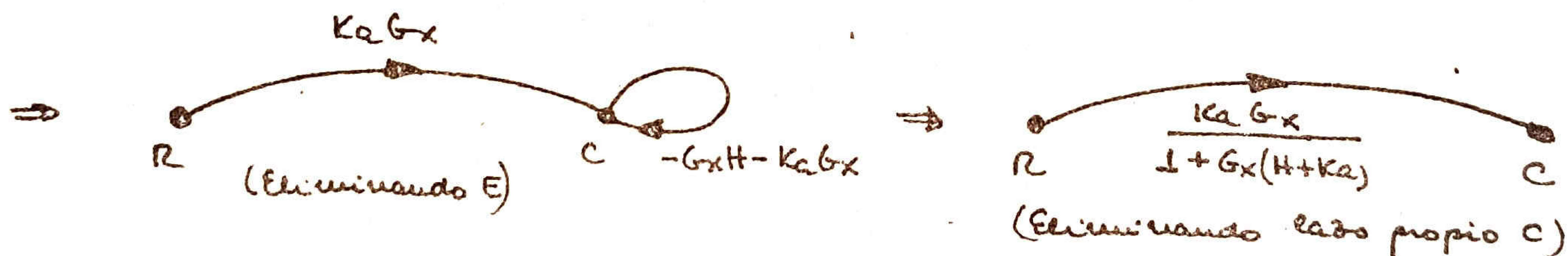


a)



b)





c) Por Mason tenemos

Camino directo: R E M1 N1 C ⇒ Ka Gx

Bucles: E M1 N1 C E ⇒ -Ka Gx // N1 C N1 ⇒ - Gx H

No existen bucles disjuntos. Por tanto:

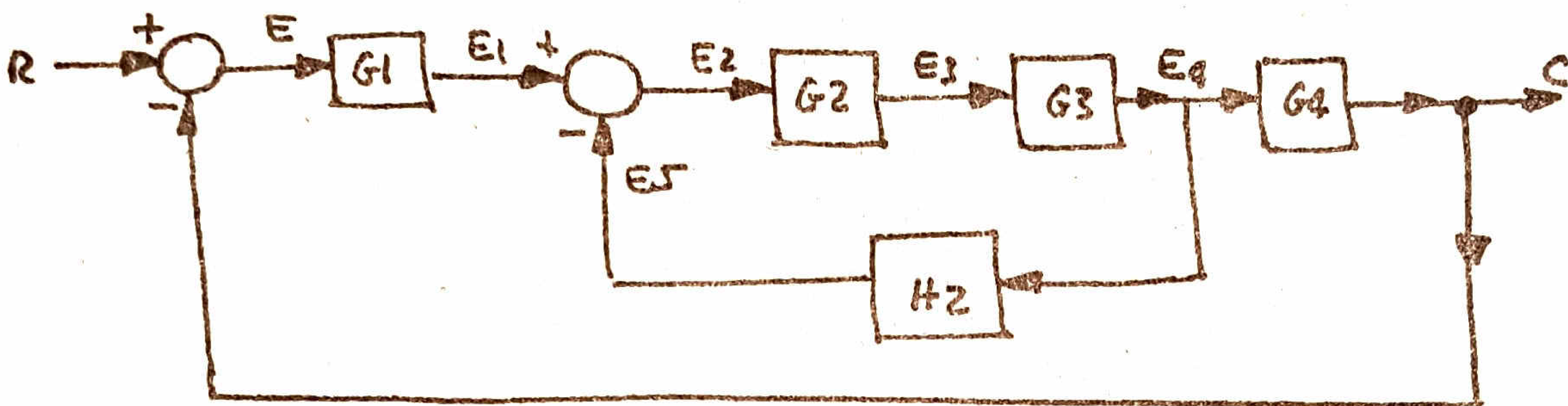
$$\frac{C}{R} = \frac{Ka\,Gx}{1-(-G_x H - Ka\,G_x)} = \frac{Ka\,Gx}{1+Gx(H+Ka)}$$

(43)

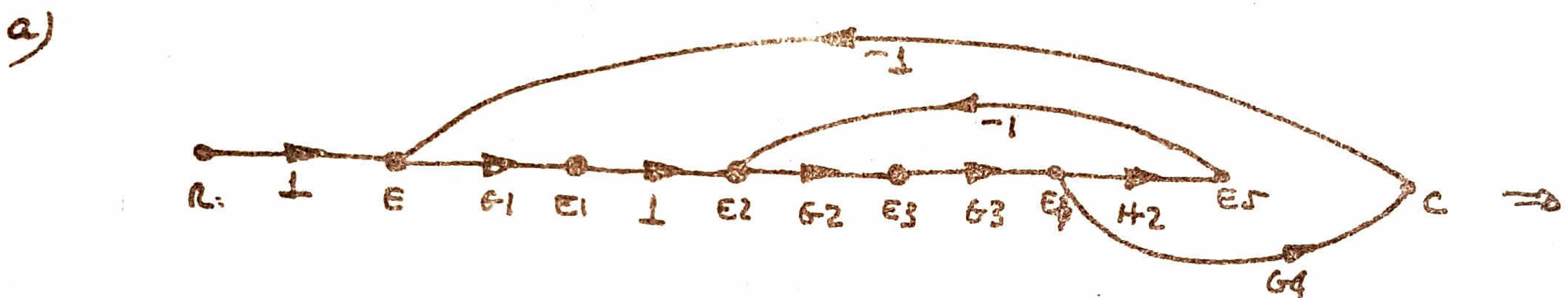
Dado el diagrama de bloques de la figura, se pide:

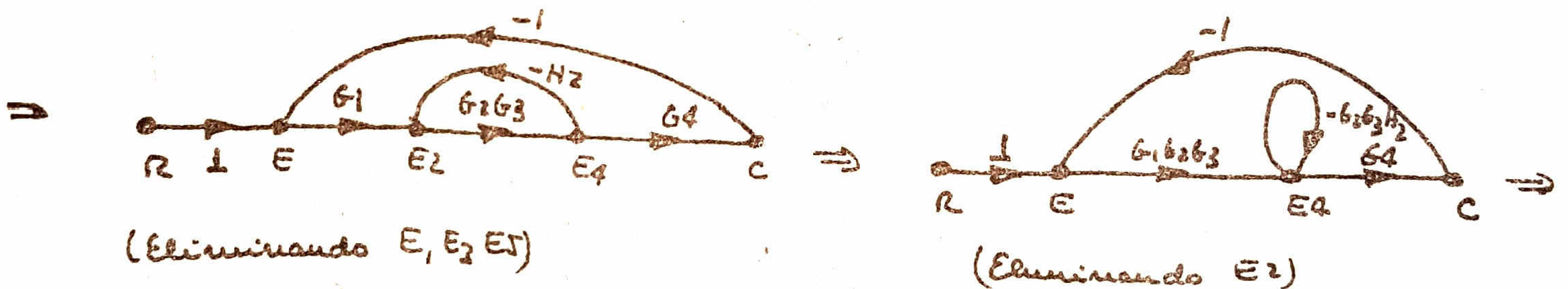
a) Su diagrama de flujos

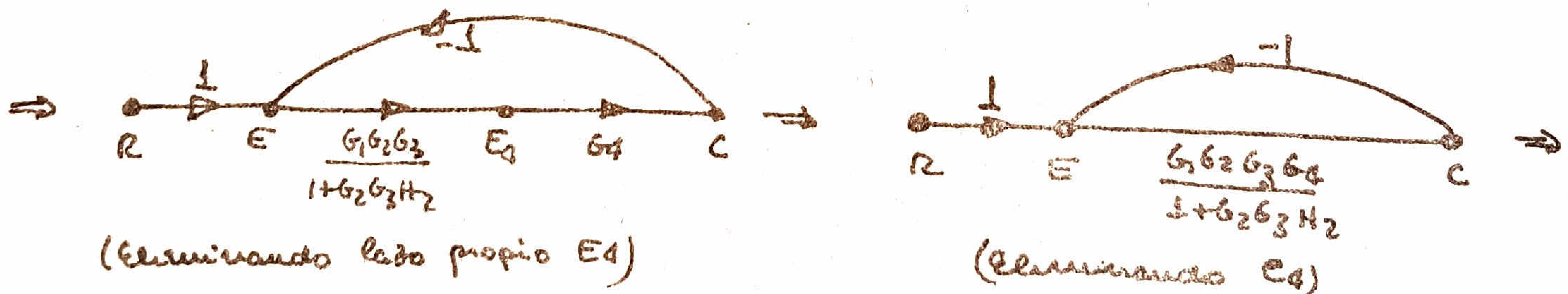
b) Calcular C/R utilizando la técnica de distensión de nudos y la regla de Mason.

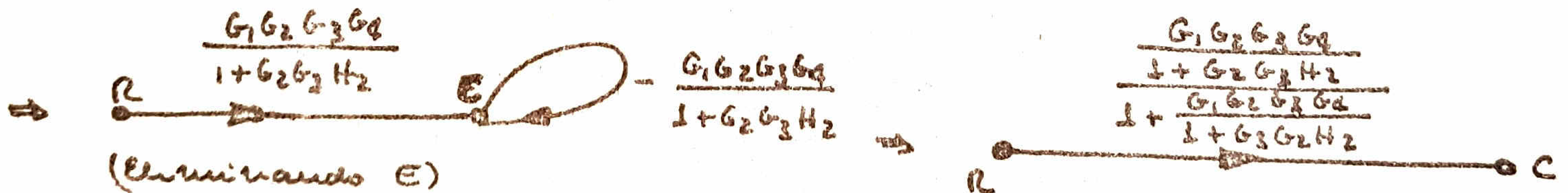


a)









Por Mason tenemos:

Caminos directo: $R\,E\,E_1\,E_2\,E_3\,E_4\,C \Rightarrow G_1 G_2 G_3 G_4$

Bucles: $E\,E_1\,E_2\,E_3\,E_4\,C\,E \Rightarrow -G_1 G_2 G_3 G_4$; $E_2\,E_3\,E_4\,E_5 \Rightarrow -G_2 G_3 H_2$

Por tanto:

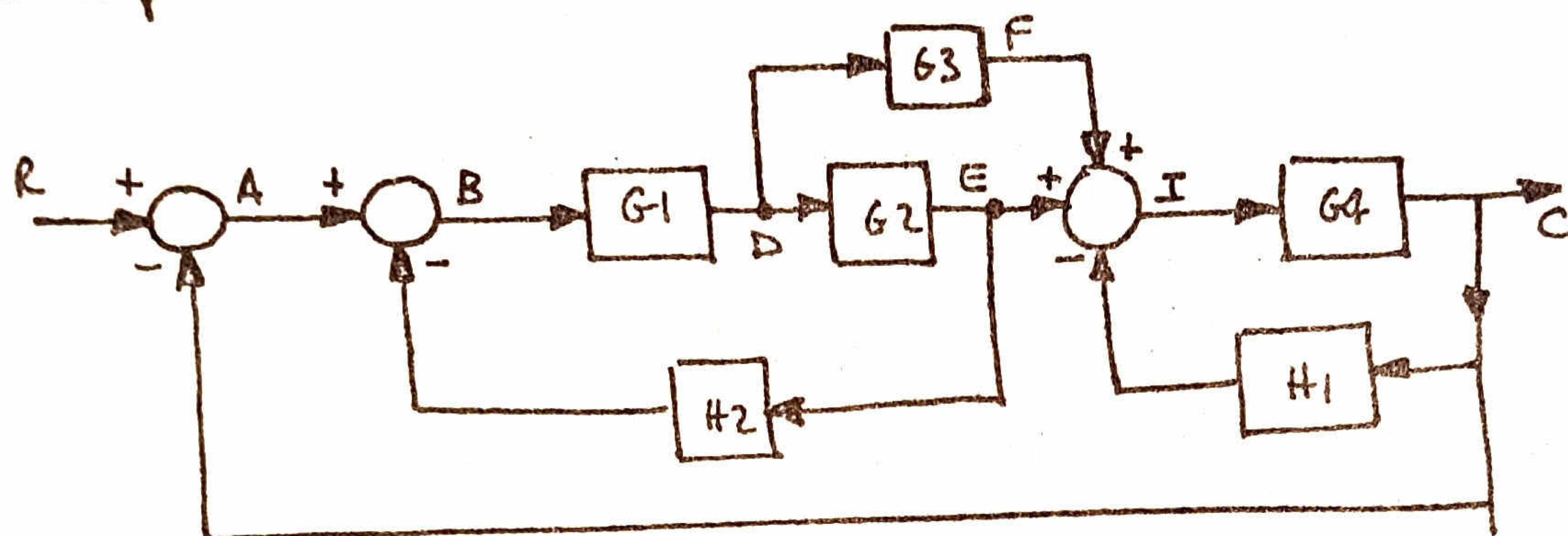
$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

(44)

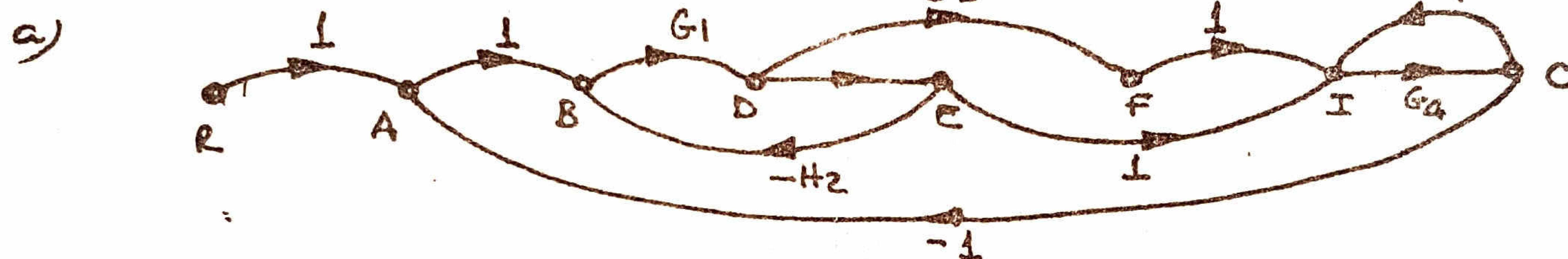
Dado el diagrama de bloques de la figura, determinar:

a) Su diagrama de flujos

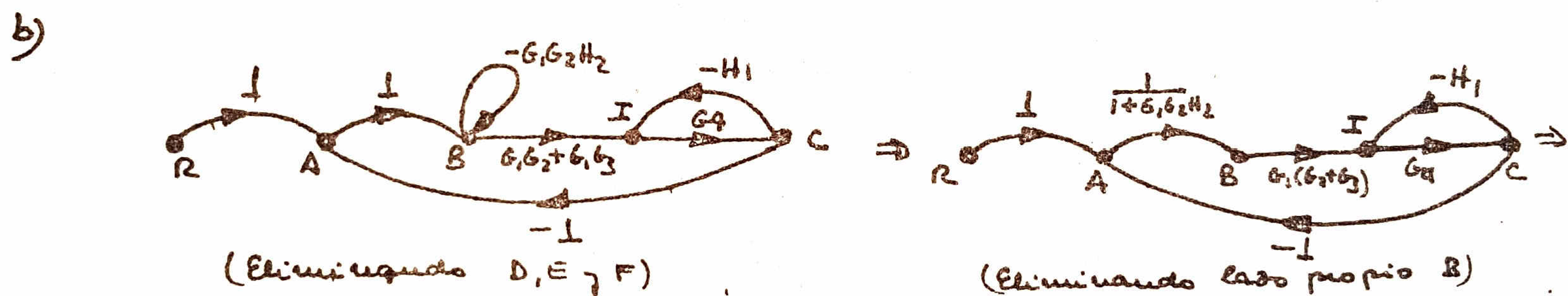
b) La relación C/R por el método de distensión de nudos y por la regla de Mason.



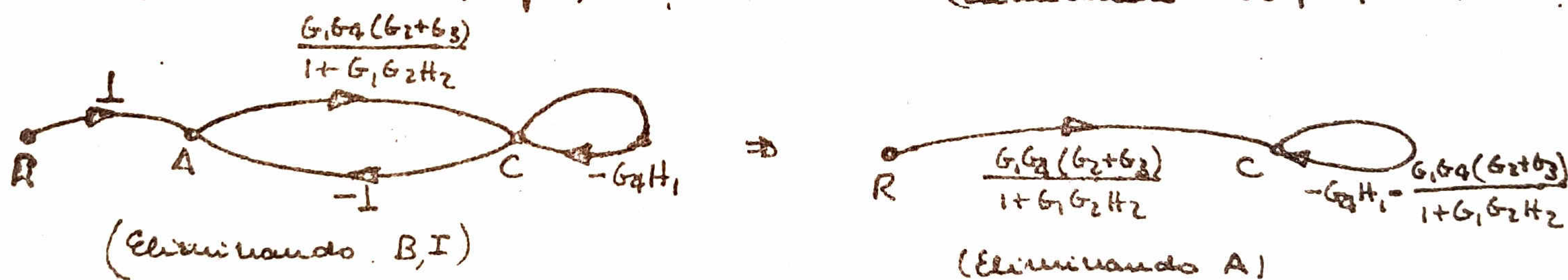
a)



b)



(Eliminando D, E y F) (Eliminando lazo propio B)



(Eliminando B, I) (Eliminando A)

R → C: $\dfrac{\dfrac{G_1G_4(G_2+G_3)}{1+G_1G_2H_2}}{1+G_4H_1+\dfrac{G_1G_4(G_2+G_3)}{1+G_1G_2H_2}}$ ⇒ $C = \dfrac{G_1G_4(G_2+G_3)}{1+G_1G_2H_2+G_4H_1+G_1G_4(G_2+G_3)+G_4G_1G_2H_2H_1}$

Por Mason, tenemos:

Caminos directos: RABDEIC ⇒ $G_1G_2G_4$ // RABDFIC ⇒ $G_1G_3G_4$

Bucles: BDEB ⇒ $-G_1G_2H_2$ // ICI ⇒ $-G_4H_1$ // ABDEICA ⇒ $-G_1G_2G_4$ //

ABDFICA ⇒ $-G_1G_3G_4$ //

Bucles disjuntos: BDEB ⇒ $-G_1G_2H_2$ // ICI ⇒ $-G_4H_1$

Por tanto

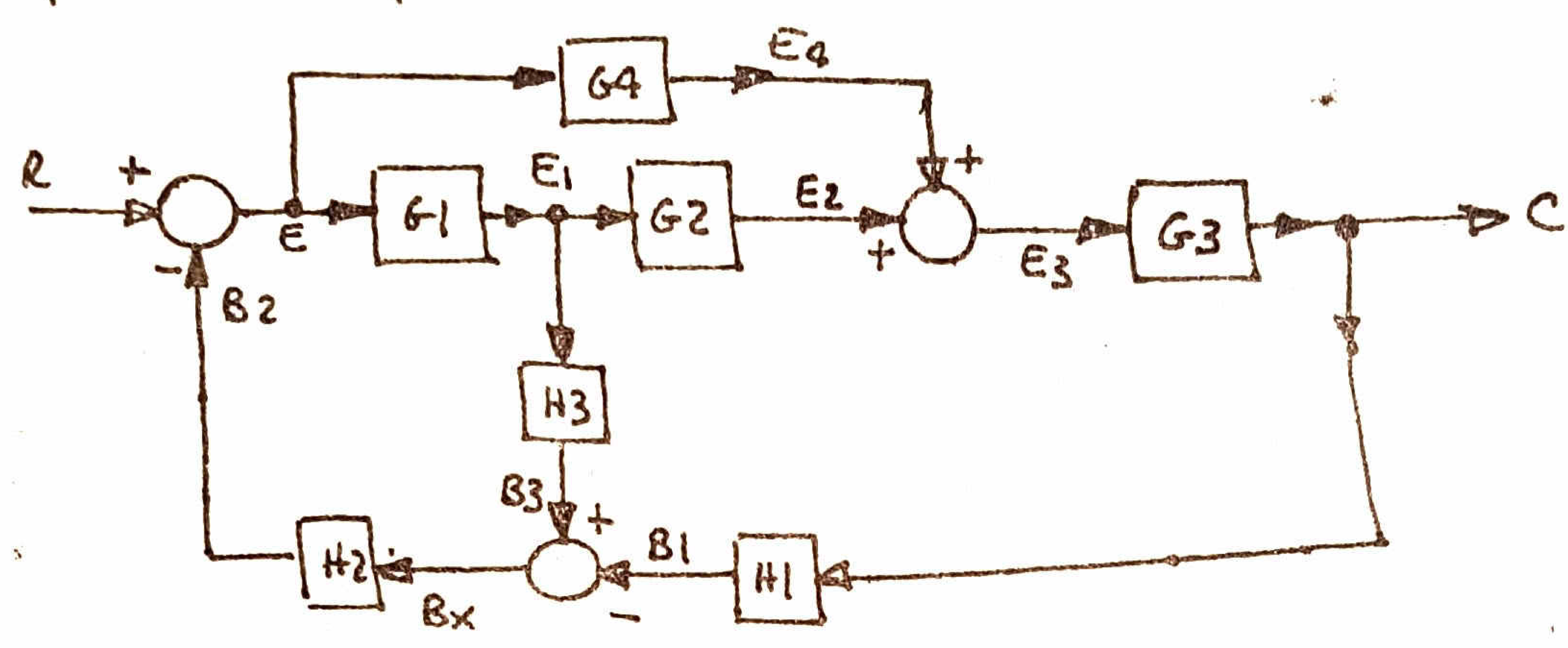
$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_4+G_1G_3G_4}{1+G_1G_2H_2+G_4H_1+G_1G_2G_4+G_1G_3G_4+G_1G_2G_4H_1H_2}$$

(45)

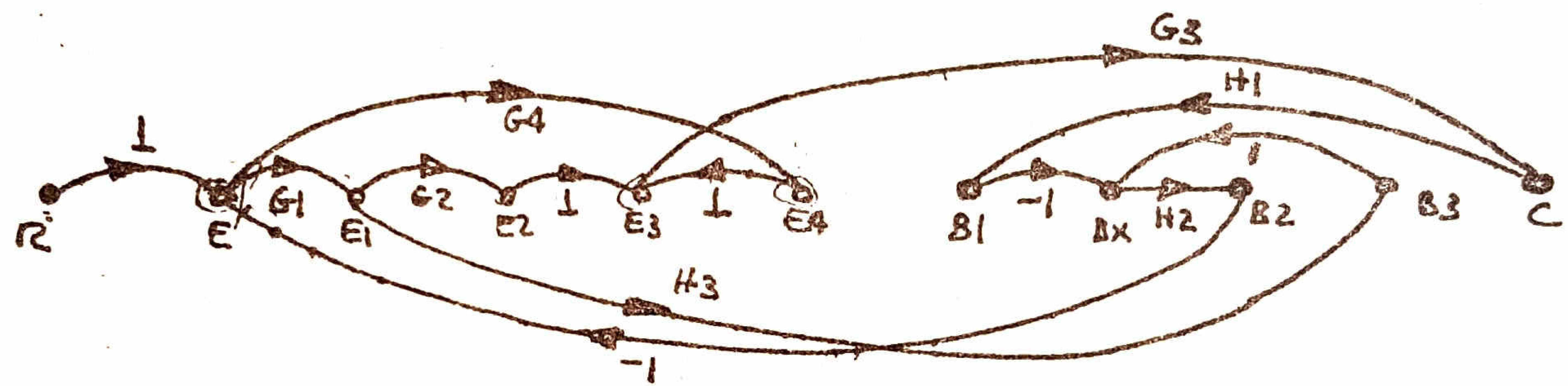
En el diagrama de bloques de la figura, se pide:

a) Flujograma de señal

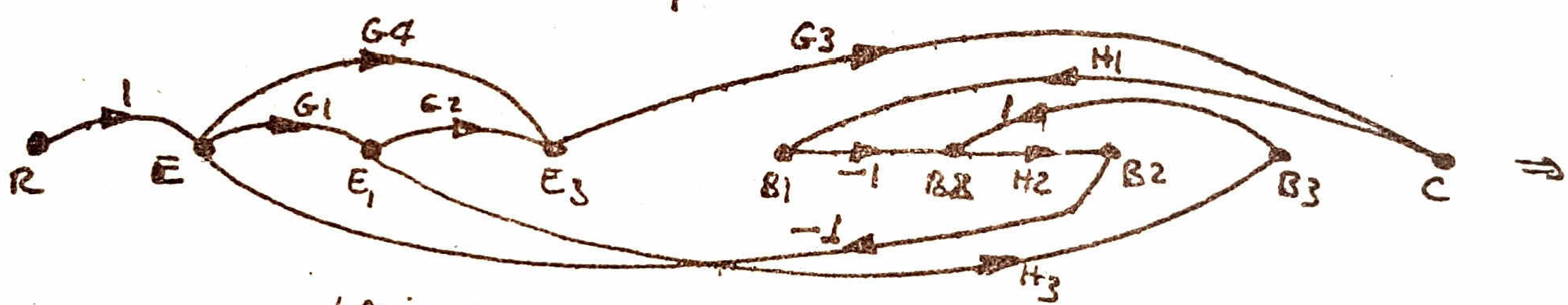
b) Determinar C/R por el método de disminución de nudos y por la regla de Mason.



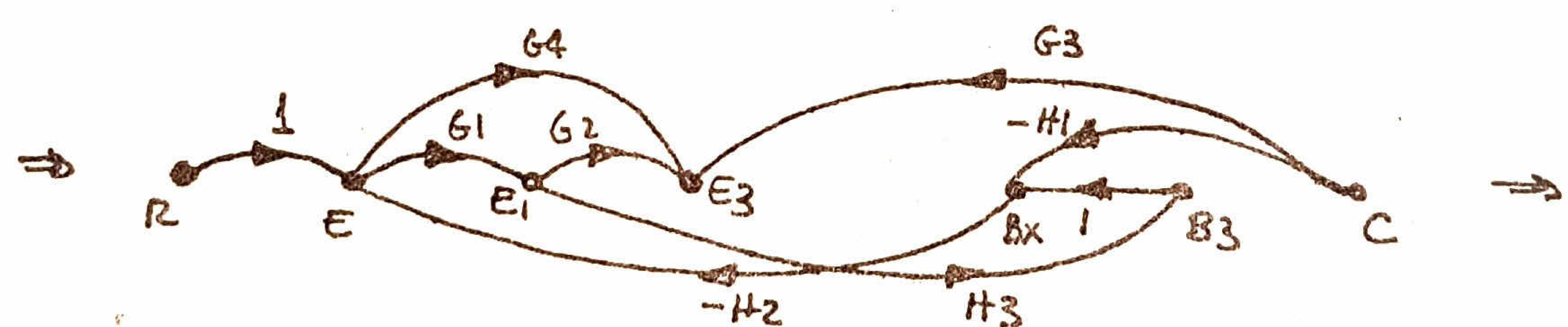
a)



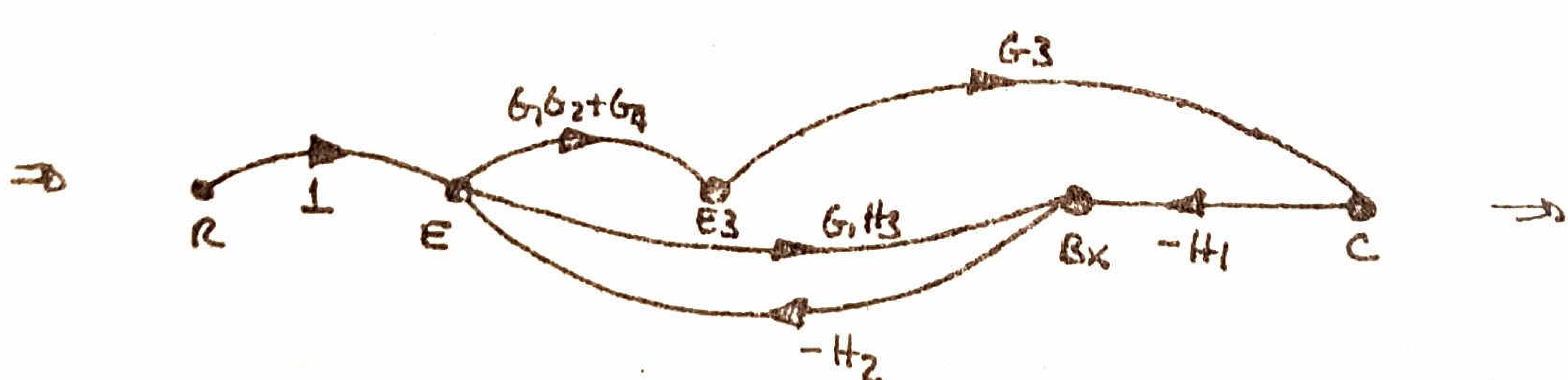
b)



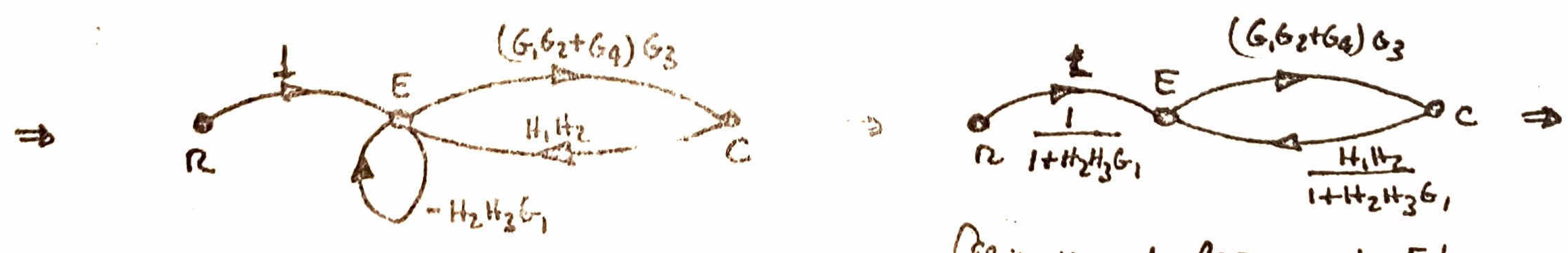
(Eliminando E_2 E_4)



(Eliminando B_1, B_2)



(Eliminando E_1 B_3)



(Eliminando laz...

45-S

$\Rightarrow$ (Diagrama: R → C con ganancia $\frac{(G_1G_2+G_4)G_3}{1+H_2H_3G_1}$ y lazo propio en C de ganancia $\frac{(G_1G_2+G_4)G_3H_1H_2}{1+H_2H_3G_1}$) $\Rightarrow$

(Eliminando E)

$\Rightarrow$ R → C: $\dfrac{\frac{(G_1G_2+G_4)G_3}{1+H_2H_3G_1}}{1-\frac{(G_1G_2+G_4)G_3H_1H_2}{1+H_2H_3G_1}}$ $\Rightarrow$ $C = \dfrac{(G_1G_2+G_4)G_3}{1+H_2H_3G_1-H_1H_2G_3(G_1G_2+G_4)}R$

(Eliminando lazo propio C)

Por Mason, tenemos:

Camino directo: $REE_1E_2E_3C \Rightarrow G_1G_2G_3$ // $REE_4E_3C \Rightarrow G_4G_3$

Bucles: $EE_1E_2E_3CB_1B_xB_2E \Rightarrow +G_1G_2G_3H_1H_2$ // $EE_4E_3CB_1B_xB_2E \Rightarrow G_4G_3H_1H_2$

$EE_1B_3B_xB_2E \Rightarrow -G_1H_3H_2$

No existen bucles disjuntos entre sí.

Por tanto:

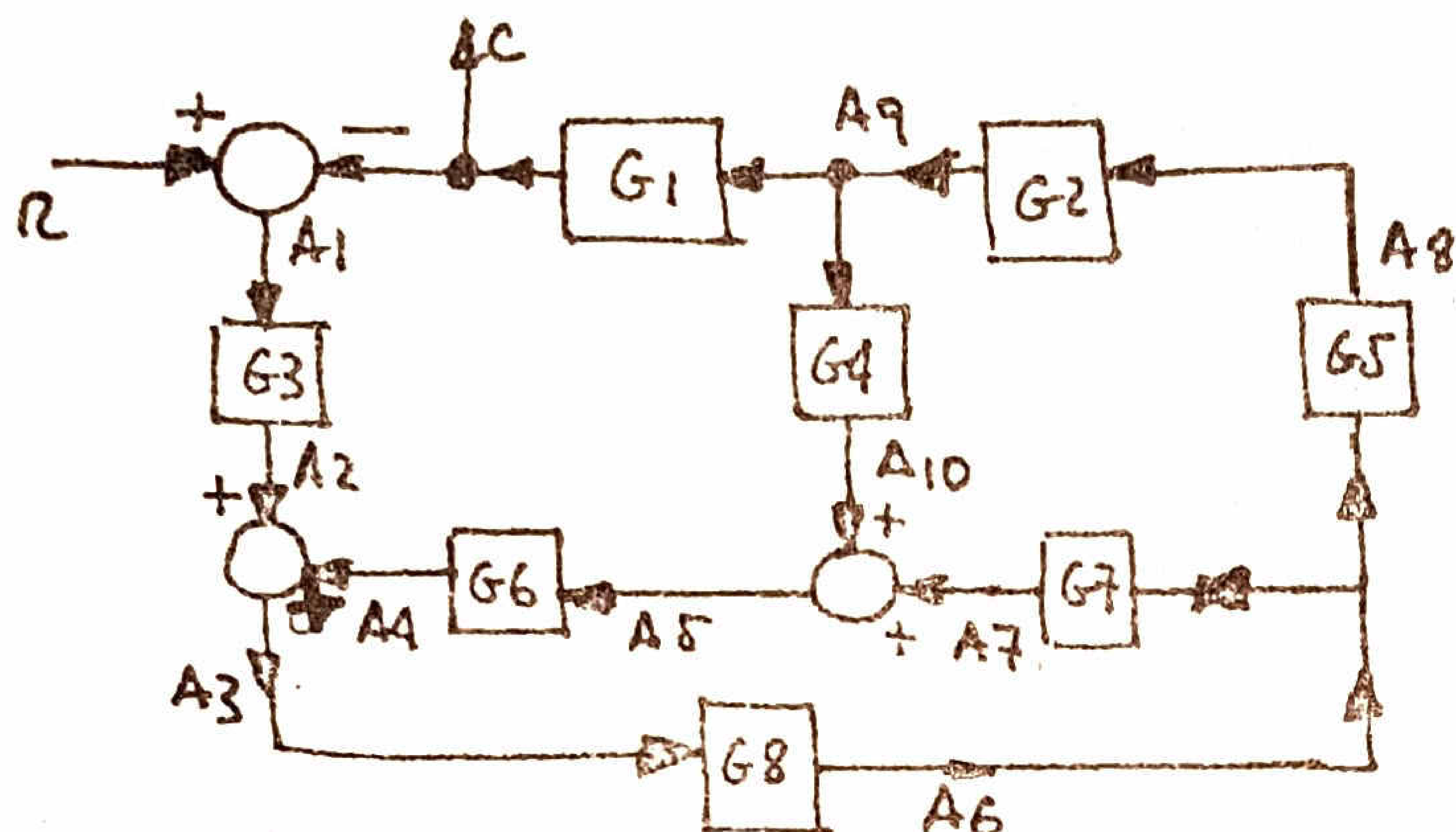
$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3+G_4G_3}{1-G_1G_2G_3H_1H_2-G_4G_3H_1H_2+G_1H_3H_2}$$ (Por Mason)

(46)

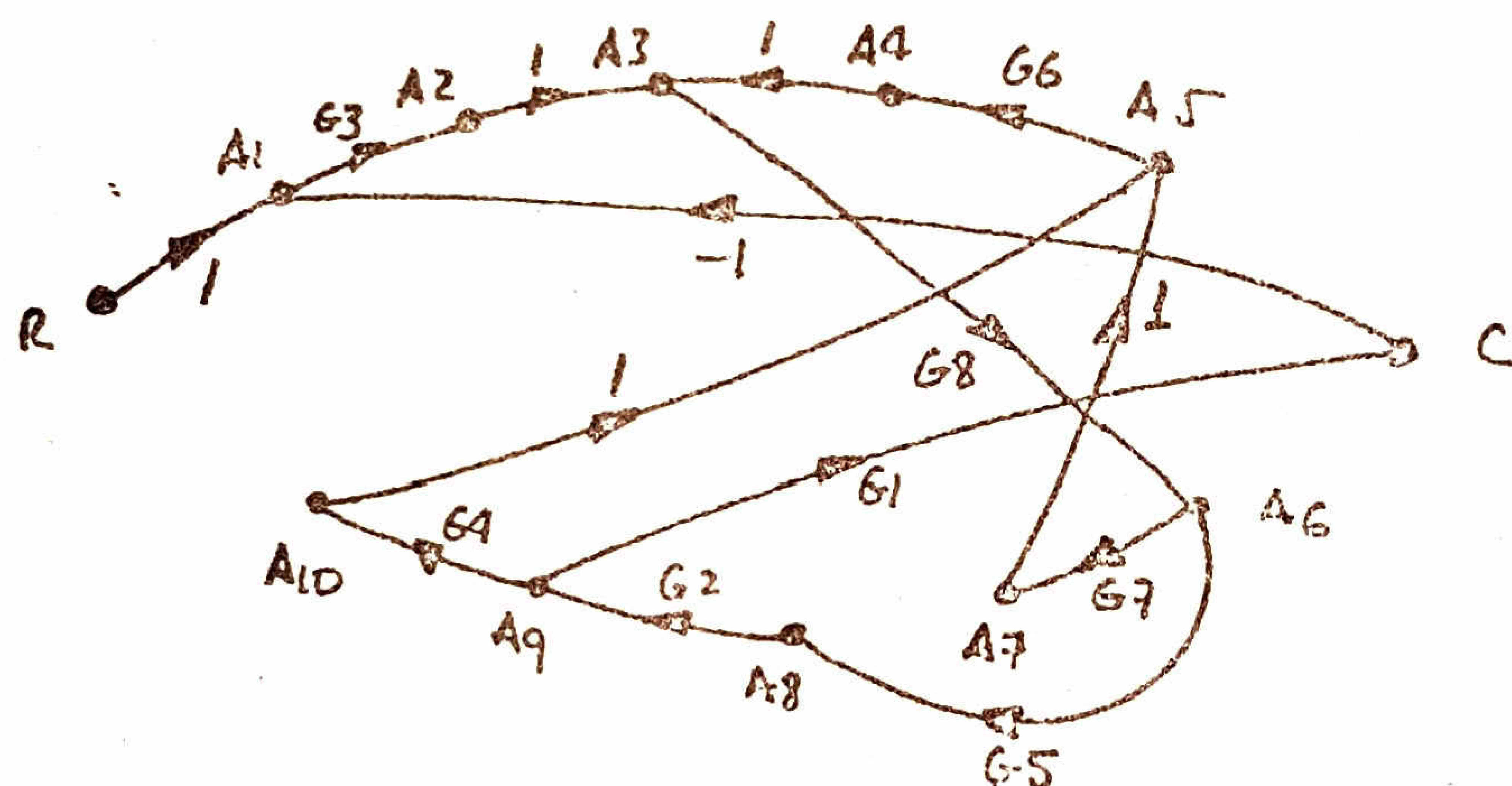
Dado el diagrama de bloques de la figura, se pide:

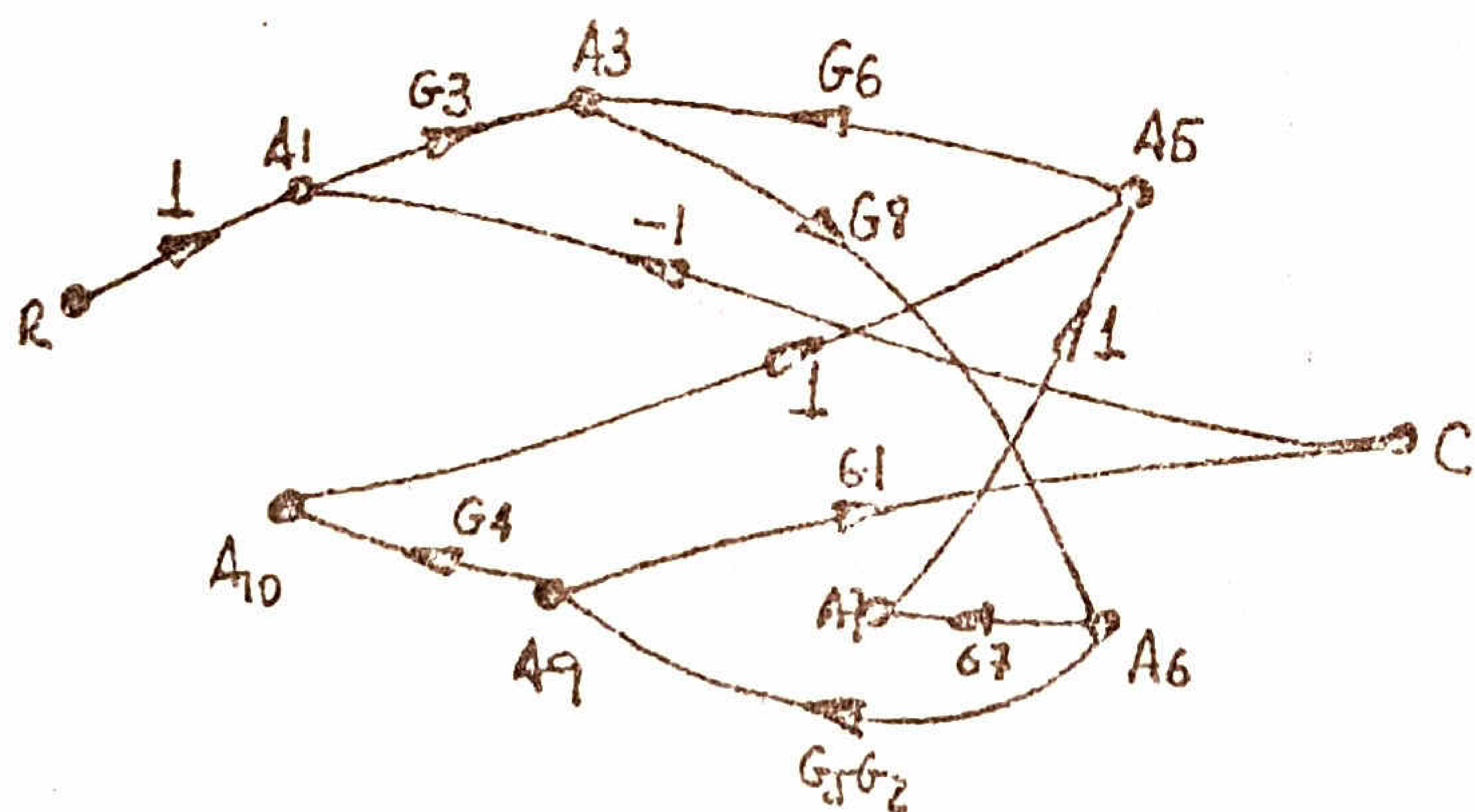
a) Flujograma de la señal.

b) Relación C/R por el método de distensión de nudos y por la regla de Mason.

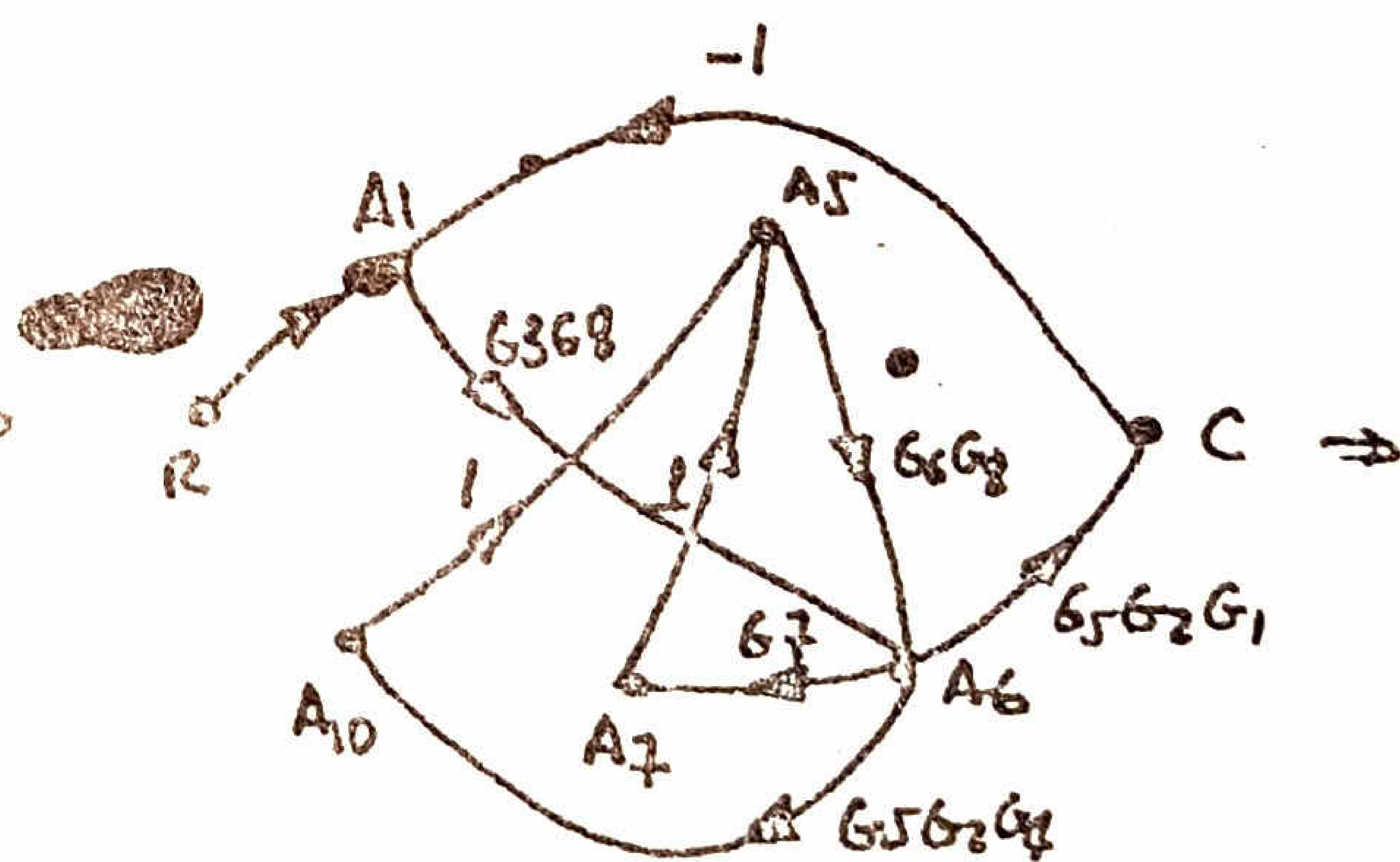


a)

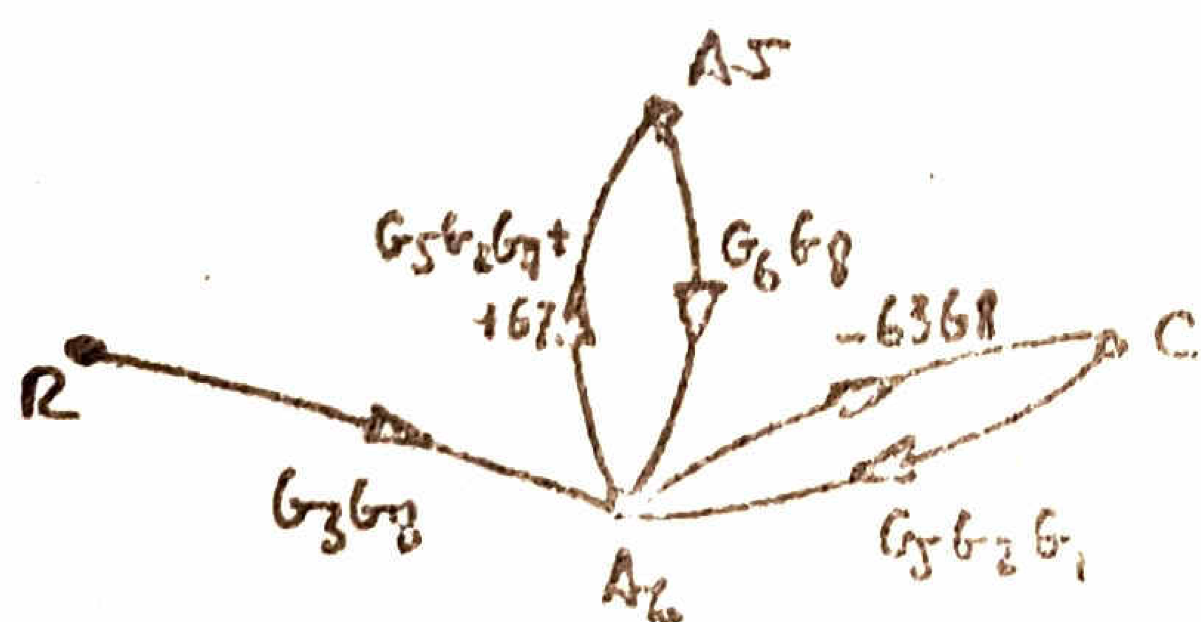




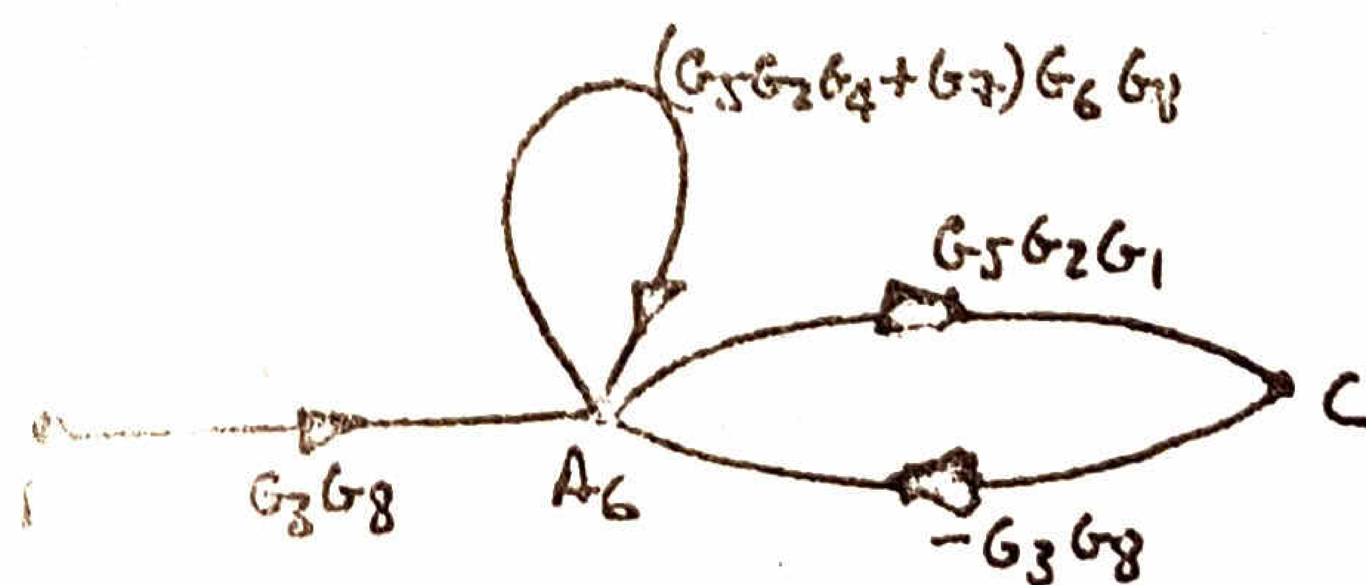
(Eliminando A2 A4 A8)



(Eliminando A3 A9)

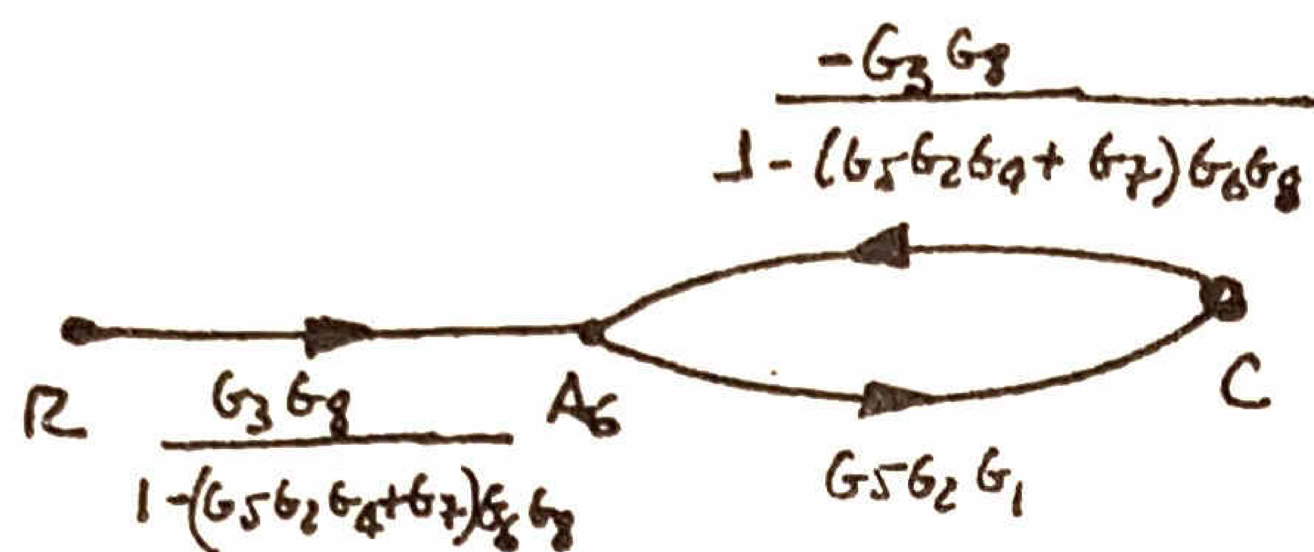


(Eliminando A1 A10 A7)



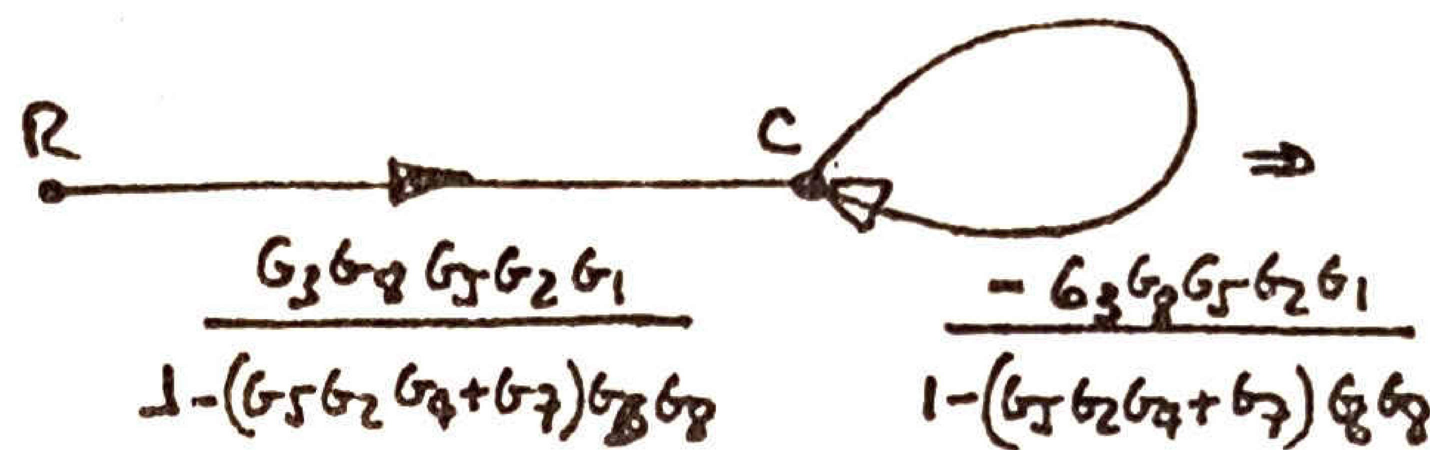
(Eliminando A5)

46-S



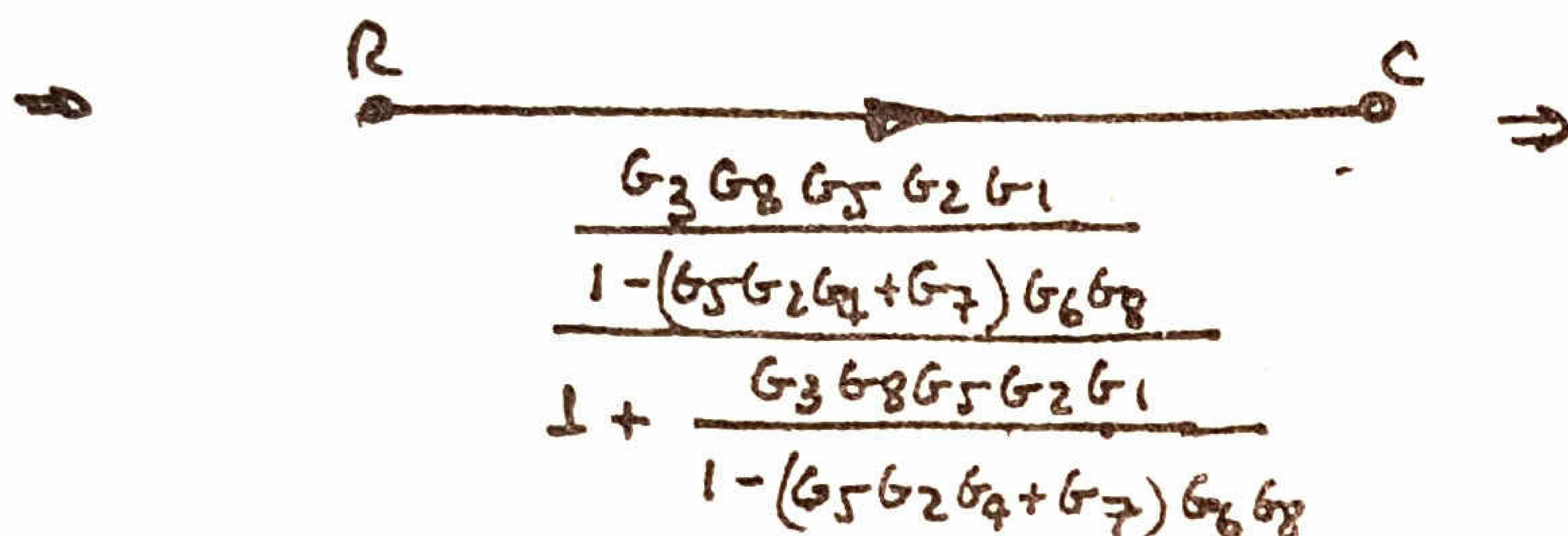
(Eliminando lazo propio A6)

$\Rightarrow$



(Eliminando A6)

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \quad C = \frac{G_3G_8G_5G_2G_1}{1-(G_5G_2G_4+G_7)G_6G_8)+G_3G_8G_5G_2G_1}\,R$$

Por Mason tenemos

Camino directo: $R\,\Delta 1\,\Delta 2\,\Delta 3\,\Delta 6\,\Delta 8\,\Delta 9\,C \Rightarrow G_3G_8G_5G_2G_1$

Bucles: $\Delta 6\,\Delta 7\,\Delta 5\,\Delta 4\,\Delta 3\,\Delta 6 \Rightarrow G_7G_6G_8$; $\Delta 1\,\Delta 2\,\Delta 3\,\Delta 6\,\Delta 8\,\Delta 9\,C\,\Delta 1 \Rightarrow -G_3G_8G_5G_2G_1$

$\Delta 3\,\Delta 6\,\Delta 8\,\Delta 9\,\Delta 10\,\Delta 5\,\Delta 4\,\Delta 3 \Rightarrow G_8G_5G_2G_4G_6$

Bucles disjuntos: no hay.

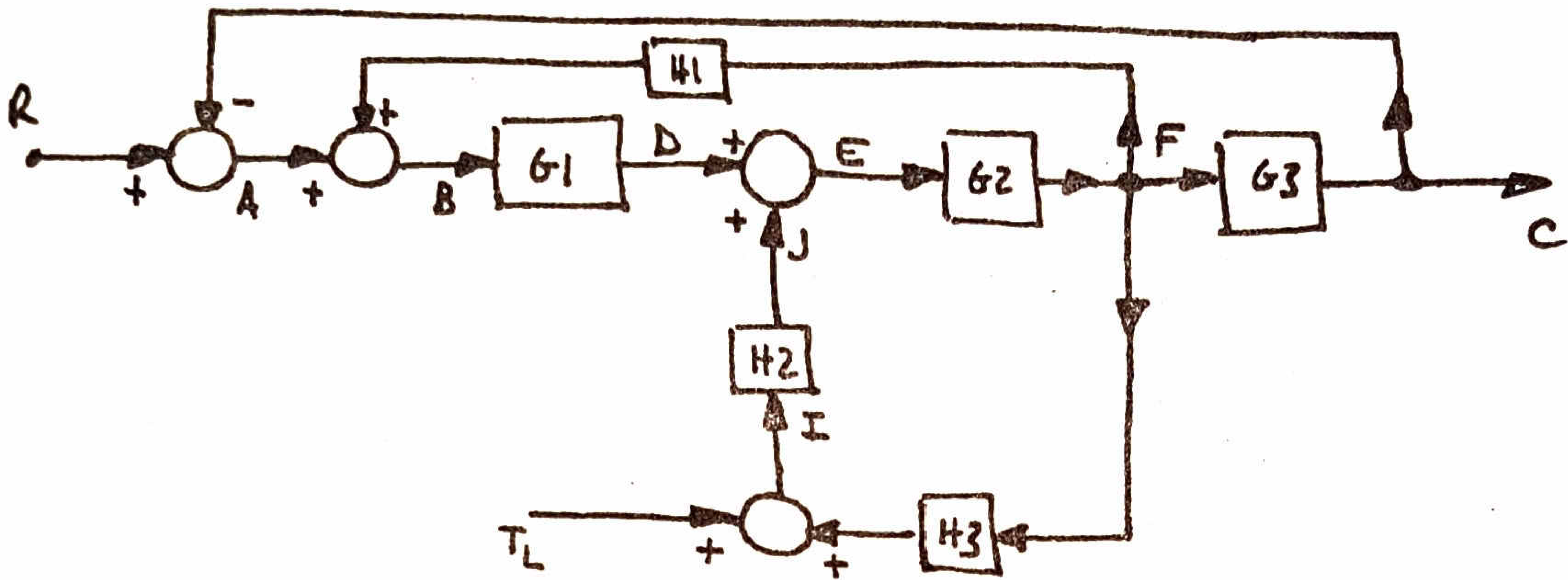
Por tanto

$$C/R = \frac{G_3G_8G_5G_2G_1}{1-G_7G_6G_8+G_3G_8G_5G_2G_1-G_8G_5G_2G_4G_6}$$

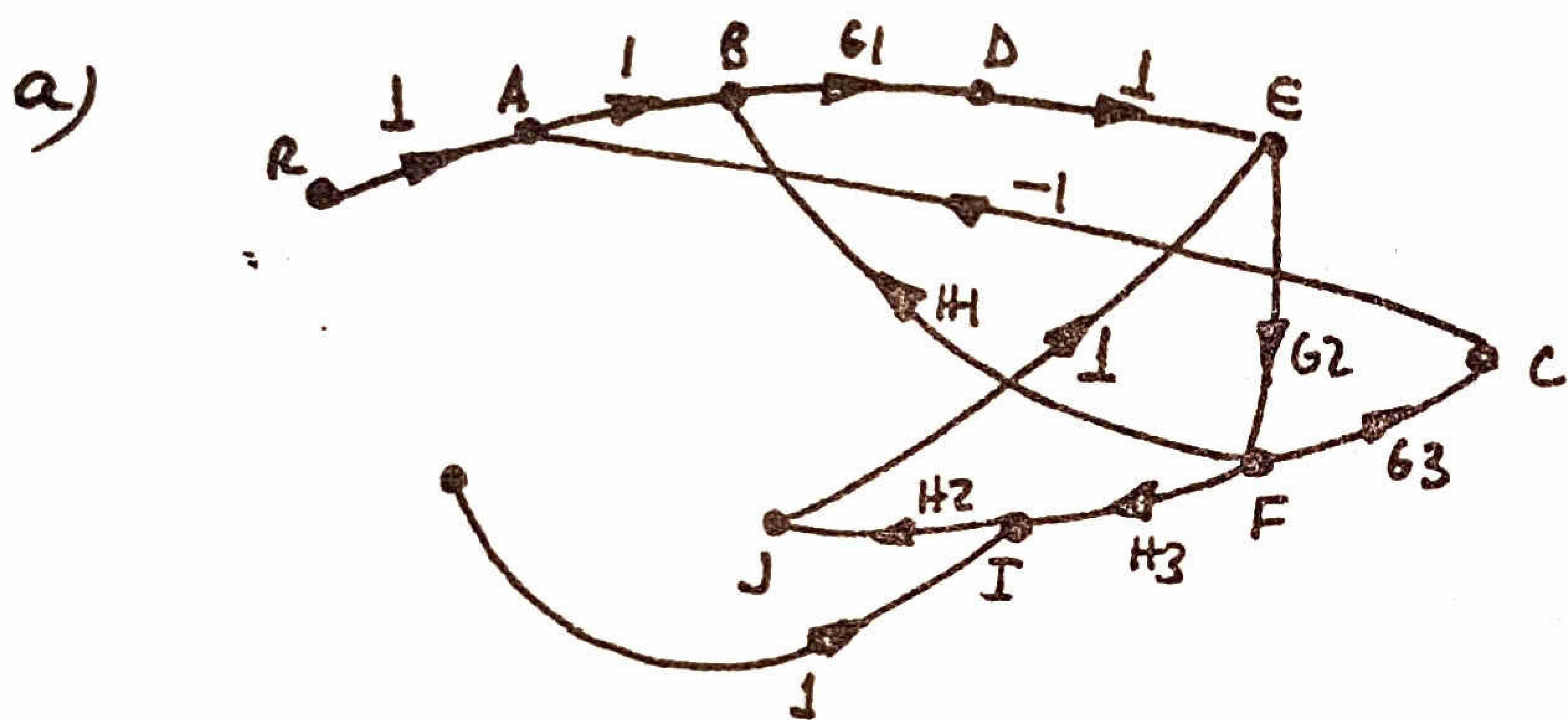
4.7 Dado el diagrama de bloques de la figura, se pide:

a) Diagrama de flujos

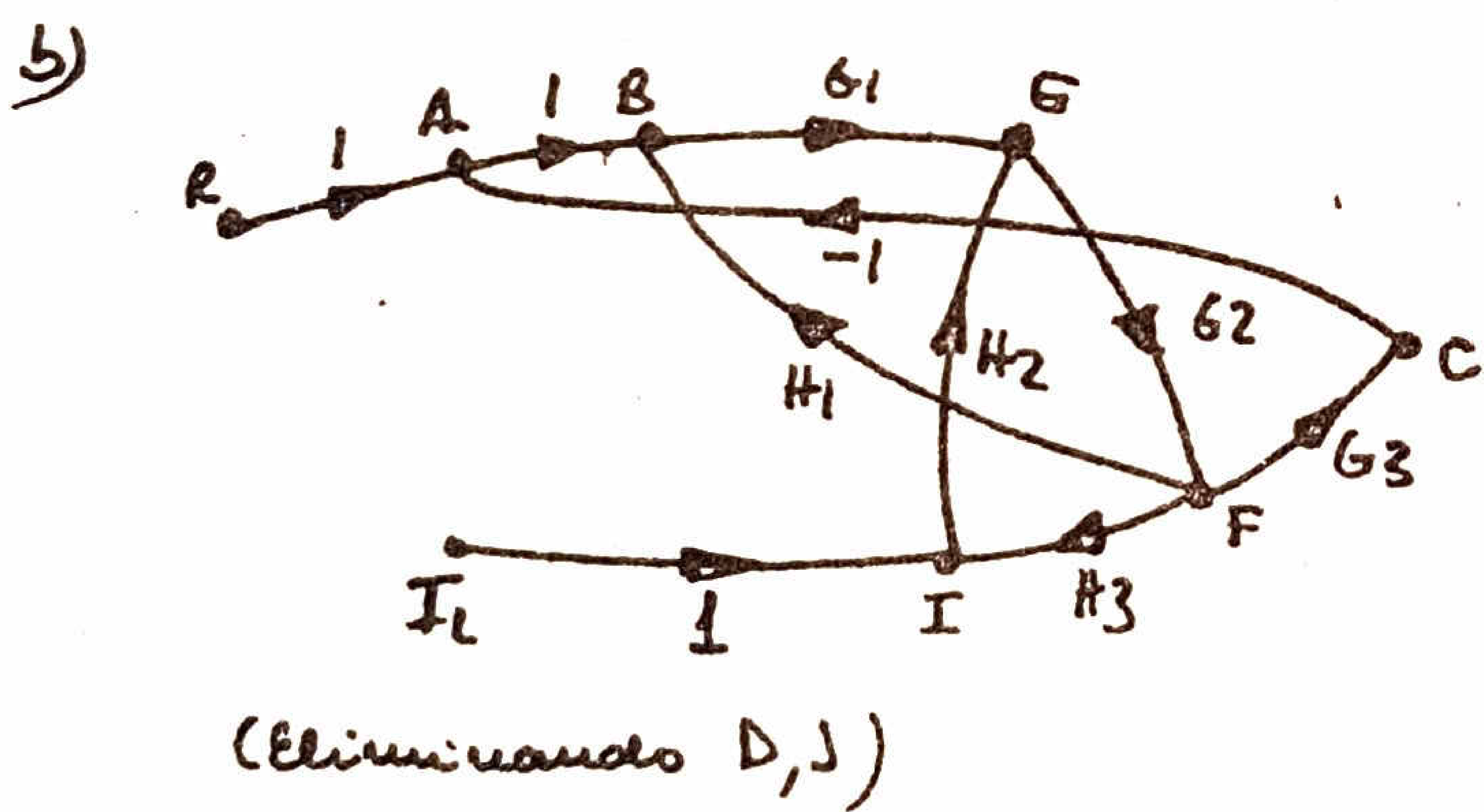
b) Cálculo de C/R por el método de distensión de nodos y por el de Mason.



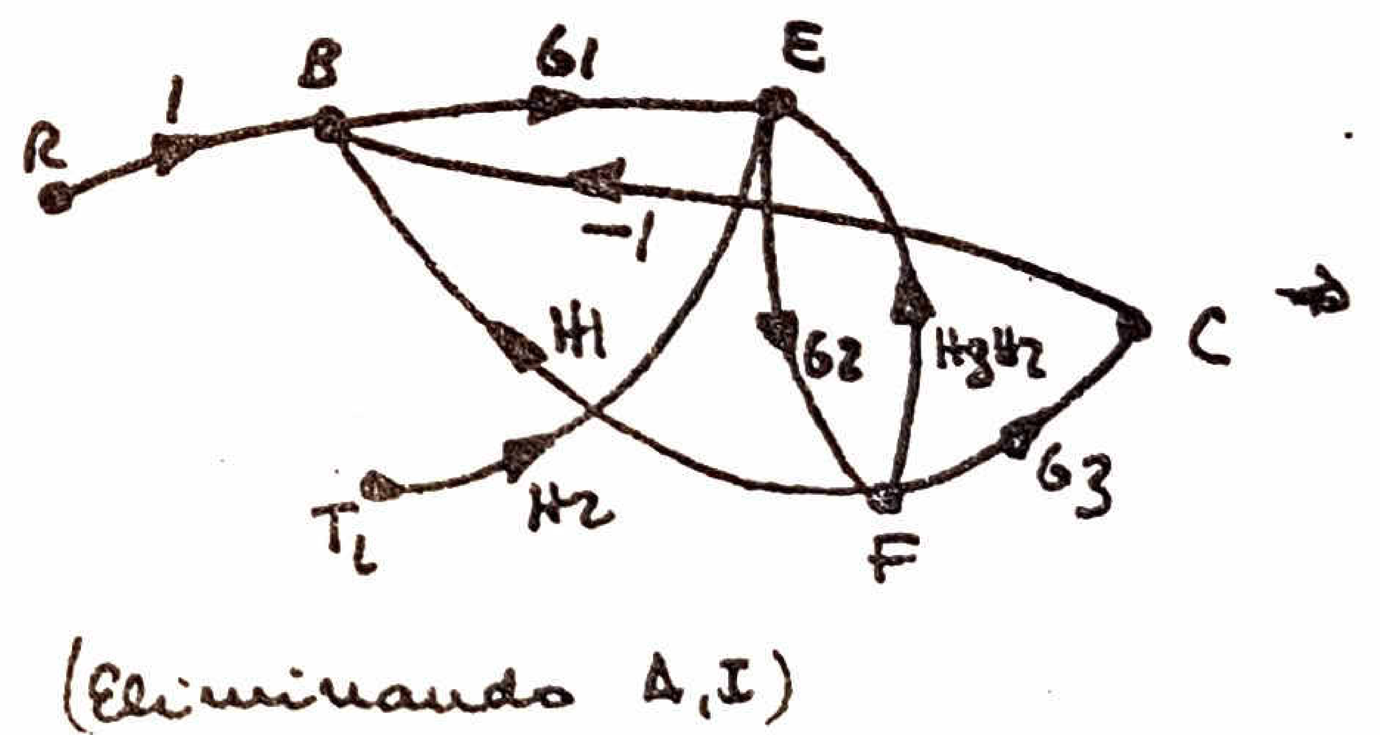
a)



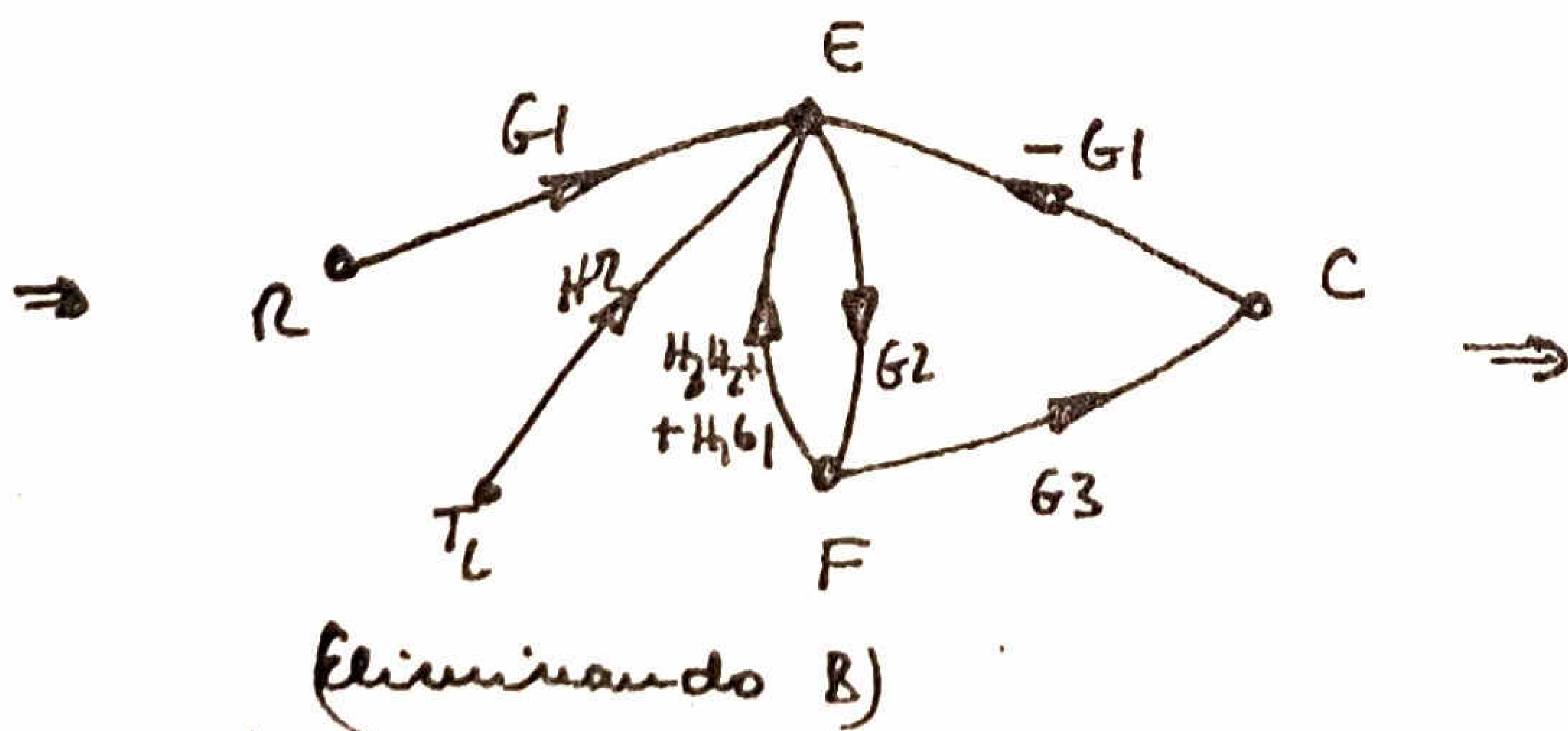
b)



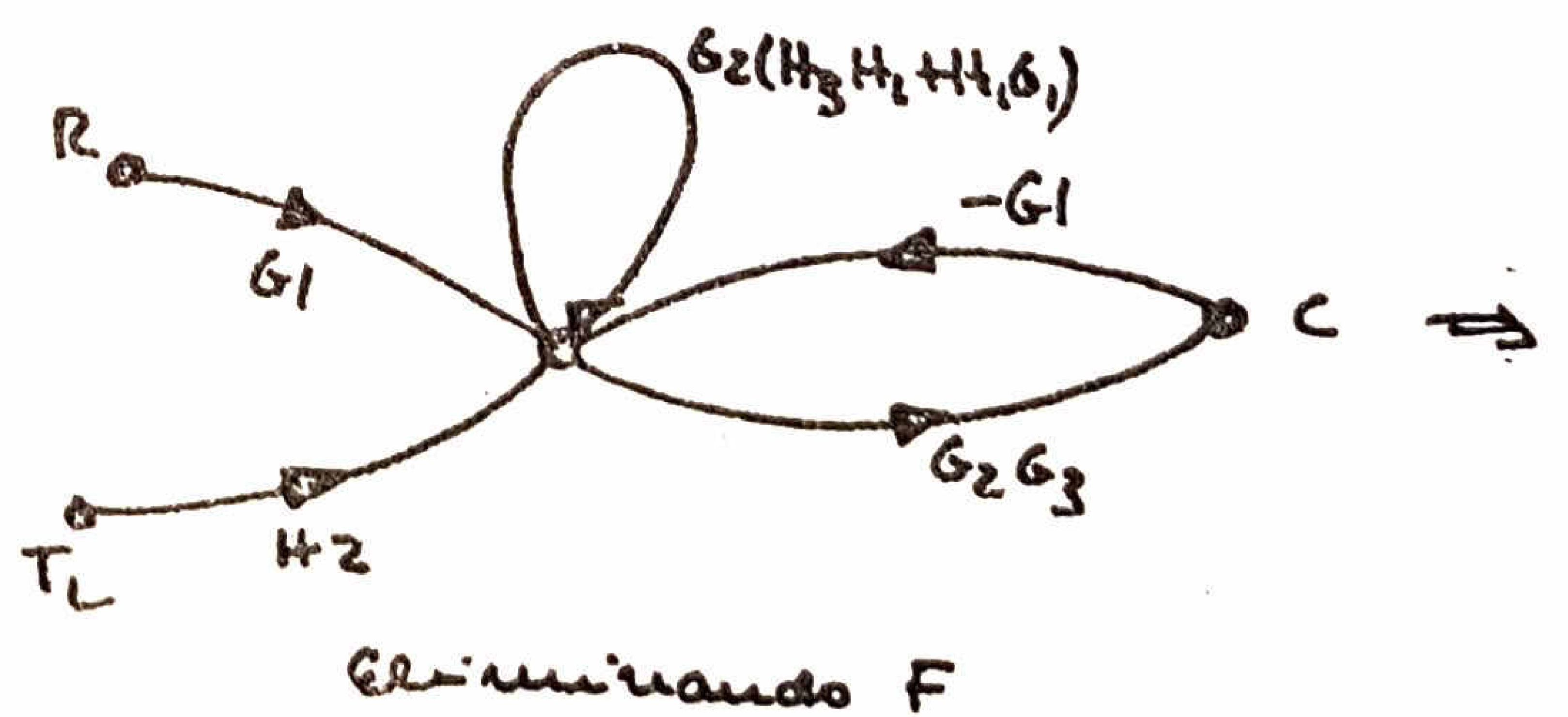
(Eliminando D, J)



(Eliminando A, I)

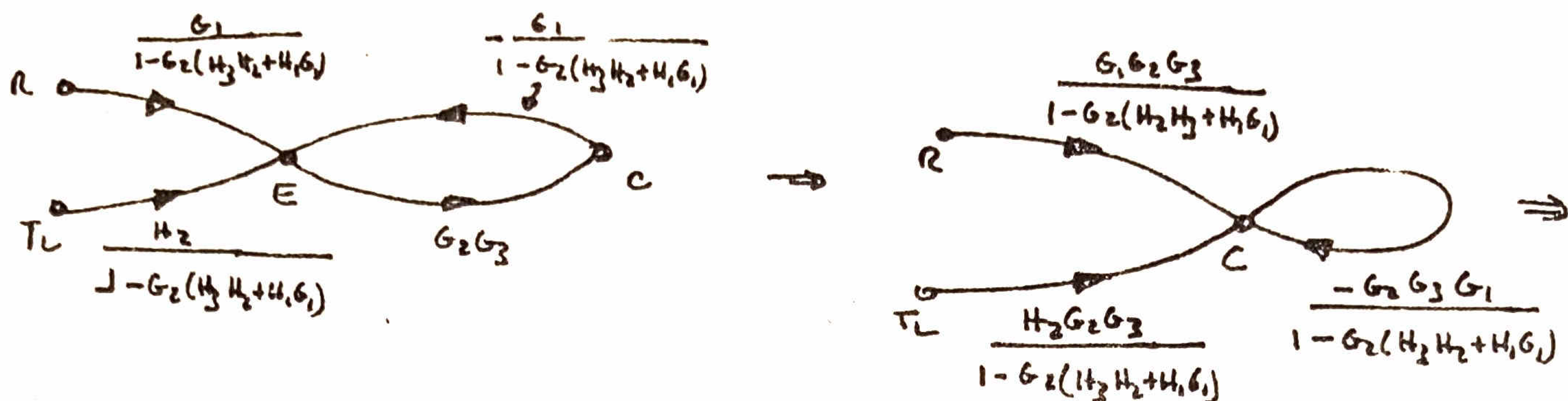


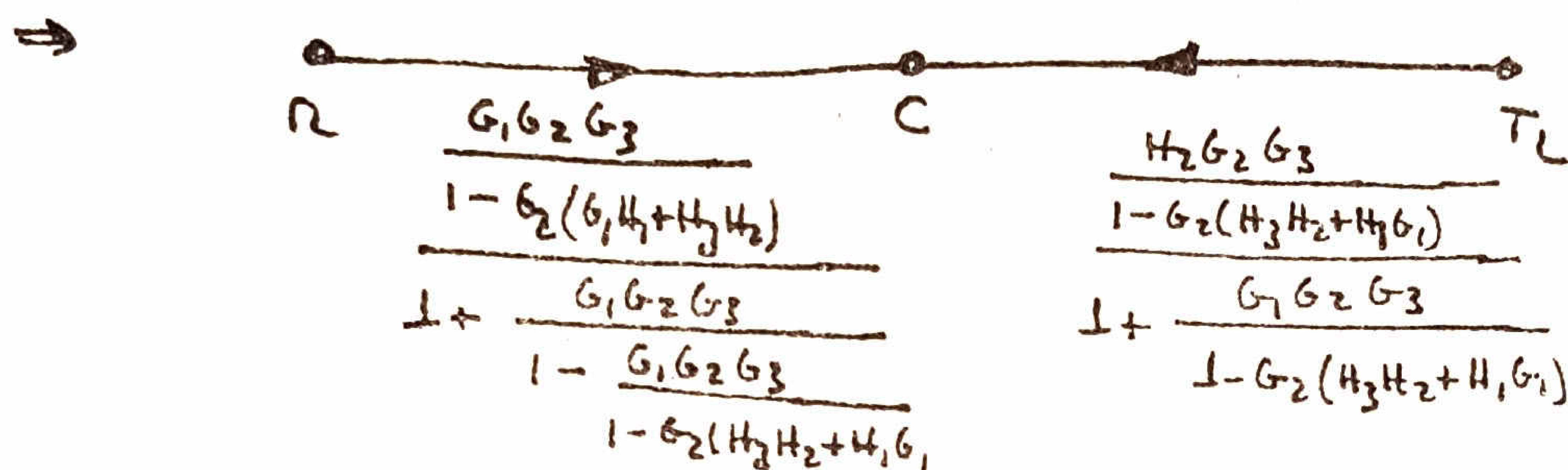
(Eliminando B)



Eliminando F

47-3





Por Mason tenemos:

Camino directo: RABEFC $\Rightarrow$ $G_1G_2G_3$

Bucles: BEFB $\Rightarrow$ $G_1G_2H_1$ // FIEF $\Rightarrow$ $H_3H_2G_2$ // ABECA $\Rightarrow$ $-G_1G_2G_3$

Bucles disjuntos: 0

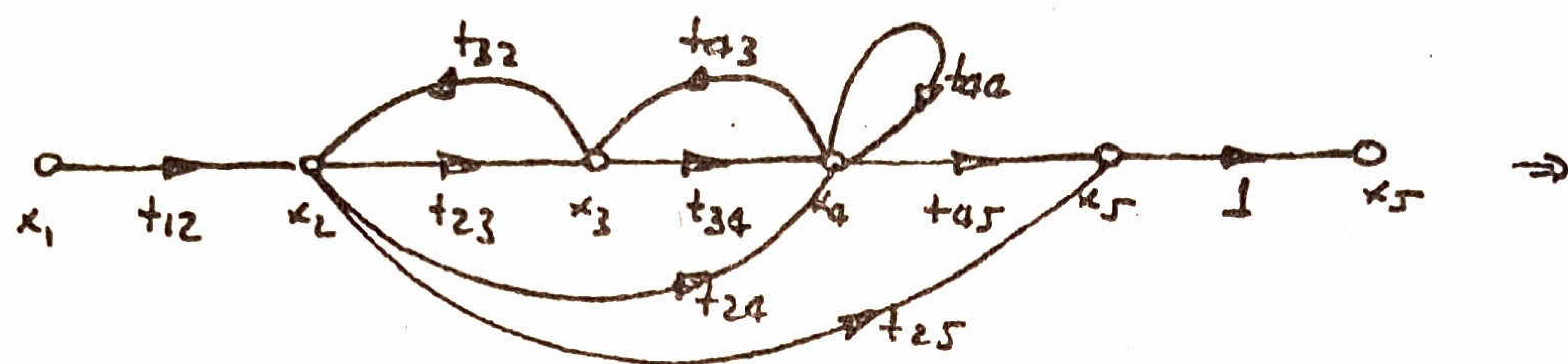
Por tanto:

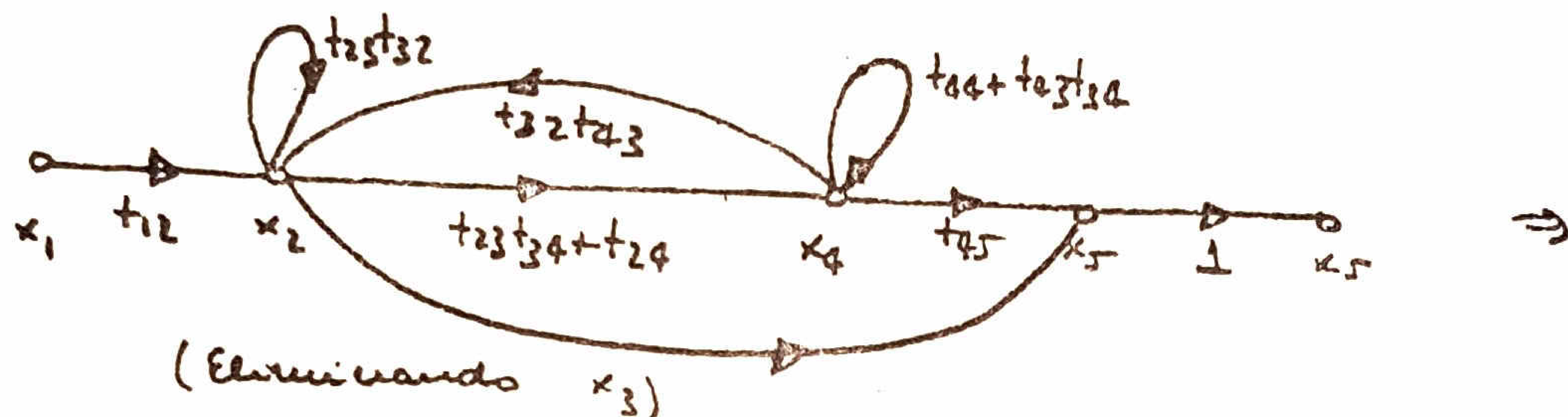
$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 - G_2H_3H_2 + G_1G_2G_3}$$

(48)

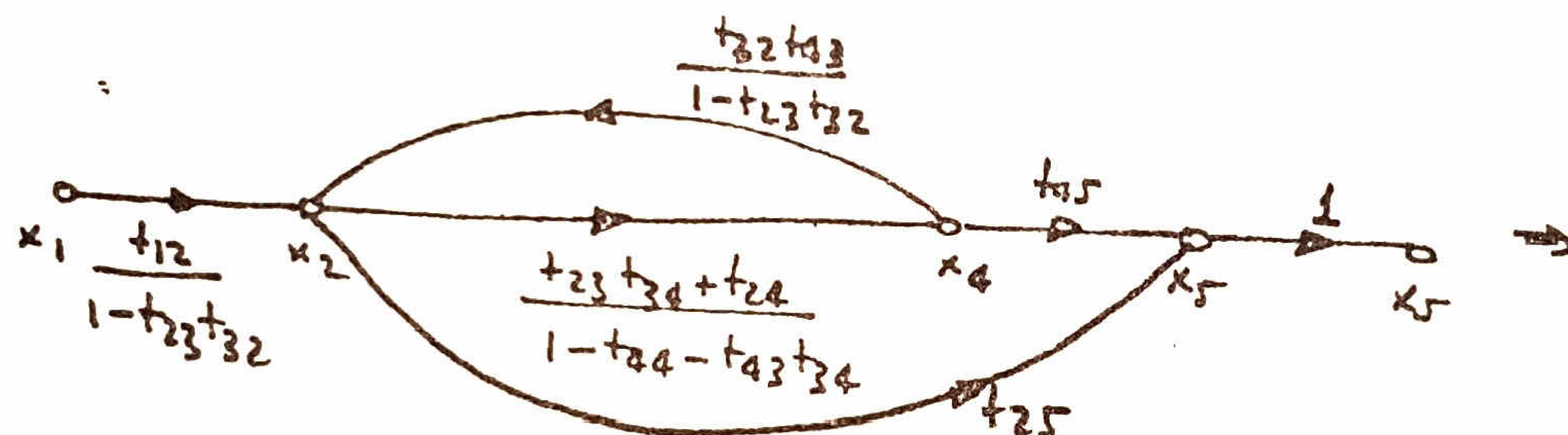
Dado el grafo de fluencia de la figura, se pide:

a) La relación entre x_5 y x_2 por el método de distensión de nudos y por la regla de Mason.

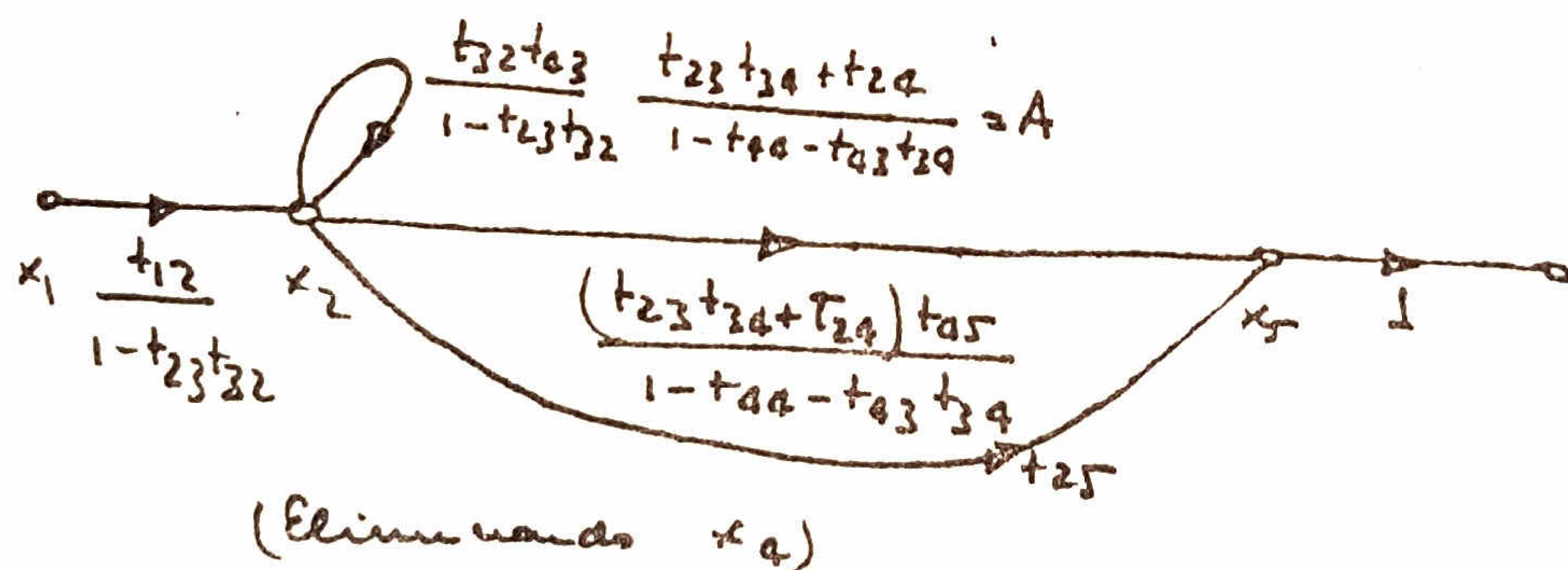




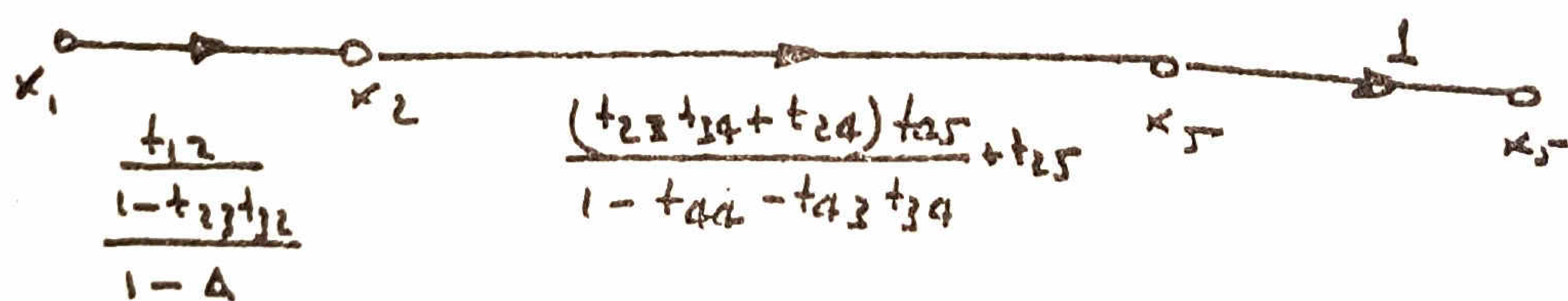
(Eliminando x_3)



(Eliminando lazos propios x_2 x_4)



(Eliminando x_4)



(Eliminando lazo propio x_2) –

x_1 —— x_5

$$\frac{t_{12}\,(t_{23}t_{34}+t_{24})\,t_{45}}{(1-t_{23}t_{32})\left(1-\frac{t_{32}t_{43}}{1-t_{23}t_{32}}\cdot\frac{t_{23}t_{34}+t_{24}}{1-t_{44}-t_{43}t_{34}}\right)(1-t_{44}-t_{43}t_{34})}+\frac{t_{12}\,t_{25}}{(1-t_{23}t_{32})\left(1-\frac{t_{32}t_{43}}{1-t_{23}t_{32}}\cdot\frac{t_{23}t_{34}+t_{24}}{1-t_{44}-t_{43}}\right)}$$

Queda finalmente:

$$x_5 = \left[\frac{t_{12}(t_{23}t_{34}+t_{24})t_{45}}{(1-t_{23}t_{32})(1-t_{44}-t_{43}t_{34})-t_{32}t_{43}(t_{23}t_{34}+t_{24})} + \frac{t_{12}t_{25}}{(1-t_{23}t_{32}) - t_{32}t_{43}\dfrac{t_{23}t_{34}+t_{24}}{1-t_{44}-t_{43}t_{34}}} \right] x_1$$

$$x_5 = \left[\frac{t_{12}(t_{23}t_{34}+t_{24})t_{45} + t_{12}t_{25}(1-t_{44}-t_{43}t_{34})}{(1-t_{23}t_{32})(1-t_{44}-t_{43}t_{34}) - t_{32}t_{43}(t_{23}t_{34}+t_{24})} \right] x_1 =$$

$$= \frac{t_{12}t_{23}t_{34}t_{45} + t_{12}t_{24}t_{45} + t_{12}t_{25}(1-t_{44}-t_{43}t_{34})}{1-t_{44}-t_{43}t_{34}-t_{32}t_{43}t_{24}-t_{23}t_{32}+t_{23}t_{32}t_{44}}\, x_1$$

Por Mason, tenemos:

Caminos directos: $x_1x_2x_3x_4x_5 \Rightarrow t_{12}t_{23}t_{34}t_{45}$ "

$x_1x_2x_4x_5 \Rightarrow t_{12}t_{24}t_{45}$ "

$x_1x_2x_3 \Rightarrow t_{12}t_{25}$

Bucles: $x_2x_3x_2 \Rightarrow t_{23}t_{32}$ " $x_4 - x_4 \Rightarrow t_{44}$

$x_3x_4x_3 \Rightarrow t_{34}t_{43}$ " $x_2x_4x_3x_2 \Rightarrow t_{24}t_{43}t_{32}$

Circuitos disjuntos: $x_2x_3x_2 \Rightarrow t_{23}t_{32}$, $x_4x_4 \Rightarrow t_{44}$

No existen tres, cuatro... circuitos disjuntos.

El primer camino directo está en contacto con los cuatro bucles, luego $\Delta_1 = \Delta$. Lo mismo el segundo camino directo.

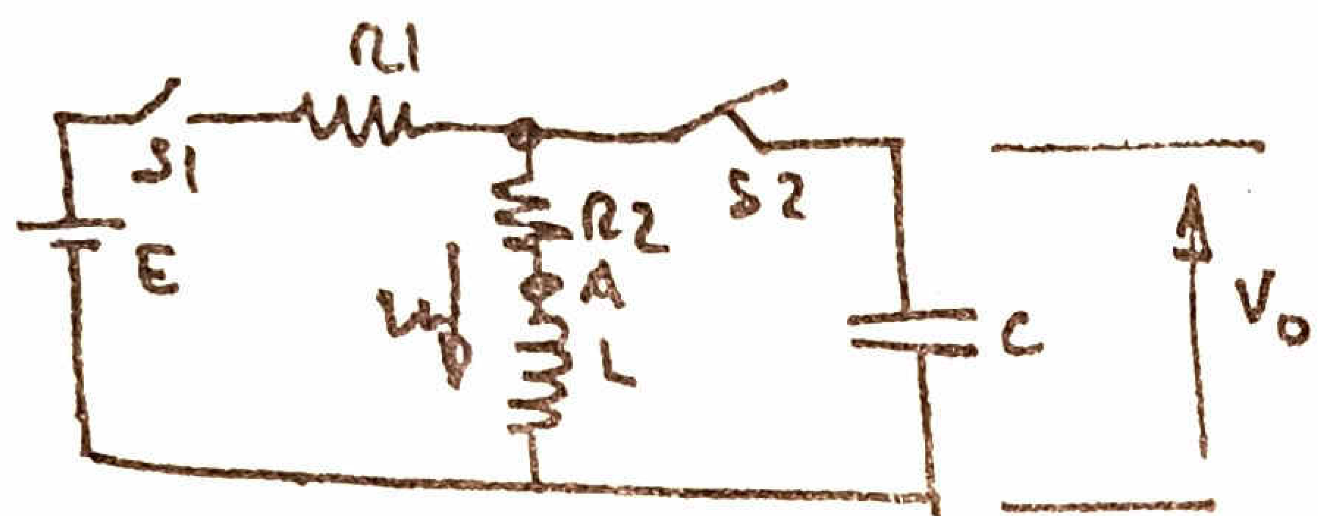
El tercer camino directo no esta en contacto con los bucles $x_3x_4x_3$ y x_4x_4 por lo que $\Delta_3 = 1 - t_{34}t_{43} - t_{44}$

Por tanto

$$\frac{x_5}{x_1} = \frac{t_{12}t_{23}t_{34}t_{45} + t_{12}t_{24}t_{45} + t_{12}t_{25}(1-t_{34}t_{43}-t_{44})}{1-t_{23}t_{32}-t_{34}t_{43}-t_{44}-t_{24}t_{43}t_{32}+t_{23}t_{32}t_{44}}$$

(17)

El interruptor S1 está abierto, el S2 cerrado y no hay energía almacenada en el circuito: a) Encontrar $v_0(t)$ cuando S_1 se cierra; b) Se abre S_2 0,001 sg después de cerrarse S_1. Encontrar la corriente en la bobina. c) S_2 se cierra 0,002 sg después de haberse abierto. Encontrar $v_0(t)$.



$R_1 = 1\Omega$
$R_2 = 1\Omega$
$L = 1H$
$C = 1F$
$E = 10V.$

a)

Se cierra S_1

Por nudos, tenemos

$$(1)\ \begin{cases} 0 = -\frac{1}{R_1}E + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+CD\right)V_0 - \frac{1}{R_2}V_A \\ 0 = -\frac{1}{R_2}V_0 + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{LD}\right)V_A \end{cases}$$

$$V_0 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1}E & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{LD} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+CD & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{LD} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{E}{R_1}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{LD}\right)}{\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_1LD}+\frac{1}{R_2LD}+\frac{CD}{R_2}+\frac{C}{L}} = \frac{E(LD+R_2)}{LD+R_2+R_1+R_1LCD^2+R_1R_2CD}$$

$$\left[R_1LCD^2+(L+R_1R_2C)D+R_1+R_2\right]V_0 = (LD+R_2)E$$, sustituyendo valores, tenemos

$$D^2+2D+2 = 10$$

Solución homogénea

$$D^2+2D+2=0 \qquad D = -1 \pm j$$

Solución particular.

$$V_{op} = \frac{1}{D^2+2D+2}10 = \frac{10}{2} = 5$$

Solución total

$$V_0(t) = V_{op}+V_{oh} = 5 + Ae^{-t}\operatorname{sen}(t+\theta)$$

Cálculo de A y θ

$V_o(t=0) = 0 = A \operatorname{sen}\theta + 5$ (C inicialmente descargado)

$$(DV_o)_{t=0} = \left[\frac{1}{R_1}E + \frac{1}{R_2}V_A - \frac{1}{R_1}V_o - \frac{1}{R_2}V_o\right]_{t=0} = \frac{1}{CR_1}E = 10 \quad \text{(De ec. 1)}$$

ya que $V_{A(t=0)} = V_{o(t=0)} = 0$

$$\begin{cases} 0 = A\operatorname{sen}\theta + 5 \\ 10 = -A\operatorname{sen}\theta + A\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \theta = -45^o \\ A = 5\sqrt{2} \end{matrix}$$

Por tanto:

$$V_o = 5 + 5\sqrt{2}\,e^{-t}\operatorname{sen}(t-45^o) = 5\left[1 + \sqrt{2}\,e^{-t}\operatorname{sen}(t-45^o)\right]$$

La corriente en la bobina L es entre tanto

$$(R_2+LD)\,i_L = V_o$$

$$i_{L_p} = \frac{1}{R_2+LD}V_o = \frac{1}{R_2+LD}\left[5+5\sqrt{2}\,e^{-t}\operatorname{sen}(t-45^o)\right]$$

$R+LD=0$ $\quad D = -\frac{R}{L}$

$$i_{L_h} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

Por tanto,

$$i_L = i_{Lp} + i_{Lh} = \frac{1}{R_2+LD}\left[5+5\sqrt{2}\,e^{-t}\operatorname{sen}(t-45^o)\right] + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\frac{1}{R_2+LD}\left[5+5\sqrt{2}\,e^{-t}\operatorname{sen}(t-45^o)\right] = \frac{1}{D+1}\left[5+5\sqrt{2}\,e^{-t}\operatorname{sen}(t-45^o)\right] =$$

$$= 5 + 5\sqrt{2}\,e^{-t}\frac{1}{D}\operatorname{sen}(t-45^o) = 5 - 5\sqrt{2}\,e^{-t}\cos(t-45^o)$$

$$i_L = Ae^{-\frac{R}{L}t} + 5 - 5\sqrt{2}\,e^{-t}\cos(t-45^o)$$

Para $t=0 \Rightarrow i_L = 0$ (Bobina en reposo inicial)

$$i_{L(t=0)} = 0 = A + 5 - 5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = A + 5 - 5 = A = 0$$

c) Se cierra S_2 nuevamente. Tenemos nuevamente las dos mallas iniciales y la misma ecuación diferencial inicial

$$\left[D^2 + 2D + 2\right] V_0 = 10$$

$$V_0 = 5 + A_1 e^{-t_1} \operatorname{sen}(t_1 + \varphi) \qquad t_1 = t - 0{,}003$$

$$V_0 = 5 + A_1 e^{-(t-0{,}003)} \operatorname{sen}\left[(t-0{,}003) + \varphi\right]$$

$$V_{0(t=0{,}003)} = V_{0(t=0{,}001)} = 5\left[1 + \sqrt{2}\, e^{-0{,}001} \operatorname{sen}\left(\frac{0{,}36}{2\pi} - 45^\circ\right)\right] = 5 + A_1 \operatorname{sen}\varphi$$

$$(DV_0)_{(t=0{,}003)} = \left[\frac{1}{R_1} E + \frac{1}{R_2} V_A - \frac{1}{R_1} V_0 - \frac{1}{R_2} V_0\right]_{t=0{,}003} =$$

$$V_{A(0{,}003)} = V_{0(t=0{,}003)} - i_{L(t=0{,}003)} R_2 = 0{,}01 -$$

ya que

$$i_{L(t=0{,}003)} = 5 - 4{,}99995\, e^{-2(0{,}002)}$$

Por tanto:

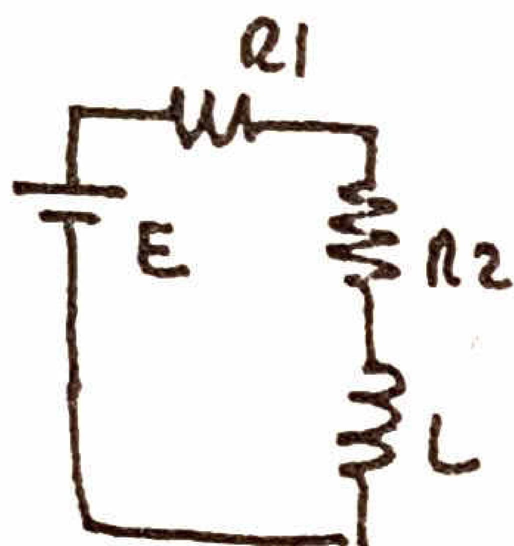
$$i_L = 5 - 5\sqrt{2}\,e^{-t}\cos(t - 45^\circ) \quad (A.)$$

para $t = 0{,}001$ (cuando se abre S_2)

$$i_{L\,t=0{,}001} = 5 - 5\sqrt{2}\,e^{-0{,}001}\cos\left(\frac{0{,}36}{2\pi} - 45^\circ\right) = +5\times10^{-5}\ A$$

(2)

Cuando se abre S_2 el nuevo circuito B:



$$i_L = \frac{1}{R_1 + R_2 + LD}\,E$$

$$i_L = i_{Lp} + i_{Lh}$$

$$i_{Lp} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 5\ A.$$

$$R_1 + R_2 + LD = 0$$

$$D = -\frac{R_1 + R_2}{L} = -2$$

$$i_{Lh} = C_1 e^{-2t}$$

Por tanto:

$$i_L = 5 + C_1 e^{-2t}$$

El tiempo t de la anterior expresión está contado a partir de la apertura de S_2. Debemos sin embargo indicar los tiempos a partir del comienzo de toda la operación o sea 0,001 y en B.

Por tanto:

$$i_L = 5 + C_1 e^{-2(t-0{,}001)}$$

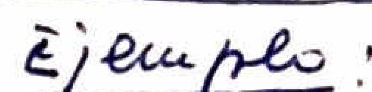
Calculo de C_1

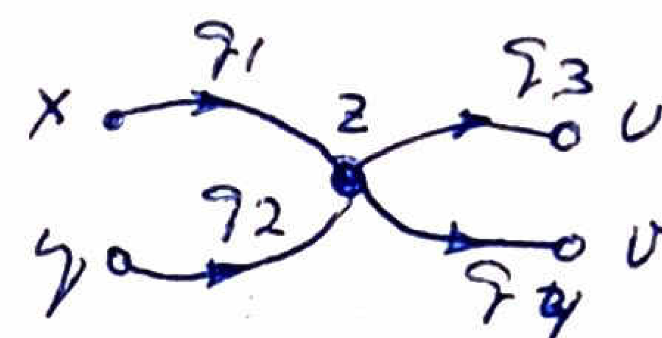
$$i_{L(t=0{,}001)} = 5 + C_1 = 5\times10^{-5} \Rightarrow C_1 = -4{,}99995$$

Por tanto

$$i_L = 5 - 4{,}99995\,e^{-2(t-0{,}001)}$$

R — E_1 — G_1 — E_2 — E_3 — G_2 — E_4 — G_3 — E_5 — G_5 — E_7 E_8 — G_6 — E_9 — E_{10} — G_7 — C; G_4 — E_6; H_2; H_1; $B_1 = C$





$z = g_1 x + g_2 y$
$u = (z) g_3$
$v = (z) g_4$

R 1 E1 G1 E2 1 E3 G2 E4 G3 E5 G5 E7 E8 G6 E9 1 E10 G7 C 1 C; G4; H2; -H1; 1

→ para diferenciar el nodo final que solo debe de tener ramas que afluyan a el.

$E_1 +$, $-E_2$, $-E_3$ → $E_1 - E_2 - E_3$


$E_1 = 1.R - C.1$
$E_2 = E_1 G_1$
$E_3 = E_2 1 - (-H_2 . E_4)$
$E_4 = E_3 G_2$

$E_5 = E_4 G_3$
$E_7 = G_5 . E_5$
$E_8 = E_7 . 1 - E_{10} . H_1$
$E_9 = E_8 G_6$
$E_{10} = E_9 . 1 + E_5 G_4$
$E = E_{10} . G_7$

$T = \frac{C}{R}$

$$T = \frac{\sum T_n \Delta_n}{\Delta}$$

* T_n: tramitancia de cada uno de los trayectos directos hay en el flujograma. (unen fuente con final)

$T_{n1} = 1.G_1 . 1 G_2 . G_2 G_3 G_5 . 1 G_6 . 1 G_7 . 1$
$T_{n2} = 1 G_1 . 1 G_2 \; G_3 . G_4 \; G_7 . 1$

* Δ: $1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \ldots$

$\sum L_1$: suma de tramitencias de todos los bucles cerrados que contiene el flujograma (de un nodo al mismo)

$\sum L_1 = [G_1 G_2 G_3 G_5 G_6 G_7 . (-1) + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7 (-1) + G_2 H_2 + G_6 . 1 (-H_1)]$

L_2: producto de las tramit. de bloques que no tengan ningun nodo en comun tomados de dos en dos

$\sum L_2 = [(G_2 H_2)(G_6(-H_1))]$

$\Sigma L_3 = 0$

Si fuesen tres $[A . B . C]$

$[A . B] + [A . C] + [C . D]$

Si los Σ son $0 \Rightarrow \Delta = 1$

$\Delta n = 1 - \Sigma L'_1 + \Sigma L'_2 - \Sigma L'_3$

Habra tantos Δn con T_n (trayectos directos)

$\Delta n_1 =$ la espresion Δn pero eliminando el trayecto T_{n1}

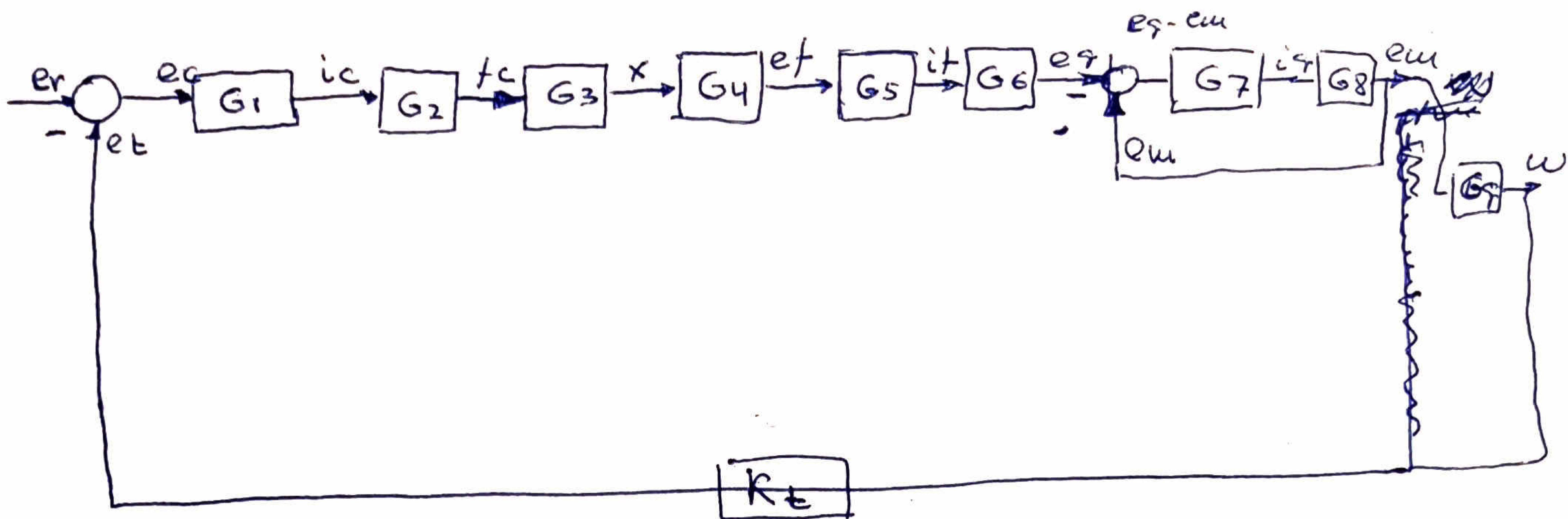
$\Delta n_1 = 1 - 0$

$\Delta n_2 = 1 - [G_6 . 1 (-H_1)]$

ΣL_1

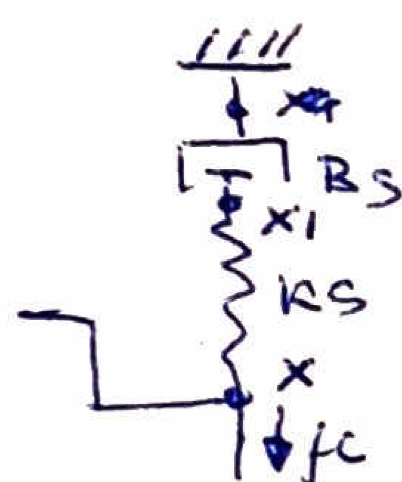
$$T = \frac{T_1 \Delta n_1 + T_{n2} \Delta n_2}{\Delta}$$

5-13



$$i_c = \frac{e_c}{R + LD}$$ Por def. $$G_1 = \frac{I_c}{E_c} = \frac{1}{R + LS}$$

$$G_2 = \frac{f_c}{i_c} = k_c$$



$$G_3 = \frac{X}{f_c}$$

$$f_c = K_s(x_1 - x) + B_s D x_1$$

$$f_c = K_s(x - x_1)$$

$$G_4 = \frac{e_f}{x} = Kx$$

$$G_5 = \frac{i_f}{e_f} = \frac{1}{R_f + L_f S}$$

$$e_q = k_q \cdot i_f \qquad G_6 = \frac{e_q}{i_f} = k_q$$

$$i_q = \frac{e_q - e_m}{R_m} \qquad G_7 = \frac{i_q}{e_q - e_m} = \frac{1}{R_m}$$

$$G_8 = k_B$$

$$e = \omega K_T \qquad G_9 = \frac{\omega}{e_m} = \frac{\omega}{K_T \omega} = \frac{1}{K_T}$$

c) Se cierra S_2 nuevamente. Tenemos nuevamente las dos mallas iniciales y la misma ecuación diferencial inicial

$$[D^2+2D+2]\, V_0 = 10$$

$$V_0 = 5 + A_1 e^{-t_1} \operatorname{sen}(t_1+\varphi) \qquad t_1 = t - 0{,}003$$

$$V_0 = 5 + A_1 e^{-(t-0{,}003)} \operatorname{sen}[(t-0{,}003)+\varphi]$$

$$V_{0\,(t=0{,}003)} = V_{0\,(t=0{,}001)} = 5\left[1+\sqrt{2}\, e^{-0{,}001} \operatorname{sen}\left(\frac{0{,}36}{2\pi} - 45^\circ\right)\right] = 5 + A_1 \operatorname{sen}\varphi$$

$$(DV_0)_{(t=0{,}003)} = \left[\frac{1}{R_1}E + \frac{1}{R_2}V_A - \frac{1}{R_1}V_0 - \frac{1}{R_2}V_0\right]_{t=0{,}003} =$$

$$V_{A\,(0{,}003)} = V_{0\,(t=0{,}003)} - i_{L\,(t=0{,}003)} R_2 = 0{,}01 -$$

ya que

$$i_{L\,(t=0{,}003)} = 5 - 4{,}99995\, e^{-2(0{,}002)}$$